

530.5  
A 5-93  
1915.

Ver. copy.  
No. 17.

PERIODICAL ROOM  
RECEIVED  
NOV 8 1915  
UNIV. OF MICH.  
LIBRARY

# ANNALEN DER PHYSIK

BEGRÜNDET UND FORTGEFÜHRT DURCH

F. A. C. GREN, L. W. GILBERT, J. C. POGGENDORFF, G. U. E. WIEDEMANN, P. DRUDE.

VIERTE FOLGE.

Band 48. Heft 1.

DER GANZEN REIHE 369. BANDES 1. HEFT.

KURATORIUM:

M. PLANCK, G. QUINCKE,  
W. C. RÖNTGEN, W. VOIGT, E. WARBURG.

UNTER MITWIRKUNG

DER DEUTSCHEN PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT

HERAUSGEGEBEN VON

W. WIEN UND M. PLANCK.

MIT DREI TAFELN.



LEIPZIG, 1915.

VERLAG VON JOHANN AMBROSIVS BARTH.  
DÖRRIENSTRASSE 16.

Bestellungen auf die „Annalen“ werden von allen Buchhandlungen, von den Postämtern und von der Verlagsbuchhandlung angenommen. Preis für den in 24 Heften (= 3 Bänden) ausgegebenen Jahrgang 54 M.

(Ausgegeben am 28. September 1915.)

# Inhalt.

	Seite
1. C. W. Oseen. Über die Wechselwirkung zwischen zwei elektrischen Dipolen und über die Drehung der Polarisationssebene in Kristallen und Flüssigkeiten . . . . .	1
2. D. Konstantinowsky. Über das Elementarquantum der Elektrizität und den photoelektrischen Effekt . . . . .	57
3. T. Heurlinger. Die Beziehungen zwischen den adiabatischen und isothermen Koeffizienten der galvano- und thermomagnetischen Effekte . . . . .	84
4. John Koch. Über eine neue Linienserie im Spektrum des einwertigen Heliums . . . . .	98
5. Karl L. Schaefer. Über eine einfache Methode zur Erzeugung akustisch empfindlicher Leuchtgasflammen . . . . .	109
6. G. Quincke. Durchbohrung von Glas mit elektrischen Funken und Strahlen. (Hierzu Tafel I—III.) . . . . .	113

Die Redaktion der Annalen wird von den umseitig genannten Herren besorgt. Den geschäftlichen Teil hat Herr **Geh. Hofrat Prof. W. Wien** übernommen, an den auch Manuskripte zu senden sind. Seine Adresse ist: **Würzburg, Pleicherring 8.**

Es wird gebeten, die Manuskripte **druckfertig** einzuliefern und in den Korrekturen den beim Druck für sie verwendeten Raum nicht zu überschreiten.

Die Verlagsbuchhandlung liefert **100 Sonderabdrücke** jeder Arbeit kostenfrei. Falls ausnahmsweise mehr gewünscht werden, so muß dies bei Rücksendung des ersten Korrekturbogens an die Druckerei auf dessen erster Seite bemerkt werden. Alle anderen, die Sonderabdrücke betreffenden Mitteilungen bittet man an die Verlagsbuchhandlung zu richten.

Anderweitiger **Abdruck** der für die Annalen bestimmten Abhandlungen oder Übersetzung derselben innerhalb der gesetzlichen Schutzfrist ist nur mit Genehmigung der Redaktion und Verlagsbuchhandlung gestattet.

Die **Zeichnungen** sind in möglichst sorgfältiger Ausführung den Abhandlungen auf besonderen Blättern beizulegen (nicht in das Manuskript selbst einzuzeichnen). Da die Figuren fortan möglichst in den Text eingefügt werden sollen, ist die Stelle des Manuskriptes recht genau anzugeben, wo sie hingehören.

**Zitate** sind am Rande oder unten auf den Seiten des Manuskriptes (nicht in dem Text selbst) und zwar möglichst in der in den „Fortschritten der Physik“ üblichen Form mit Angabe des Namens und Vornamens, der Band-, Seiten- und Jahreszahl aufzuführen.

e

1

7

4

6

1.

2.

3.

4.

5.

6.

1.

2.

3.

4.

5.



## Inhalt.

### Vierte Folge. Band 48.

#### Siebzehntes Heft.

	Seite
1. C. W. Oseen. Über die Wechselwirkung zwischen zwei elektrischen Dipolen und über die Drehung der Polarisationssebene in Kristallen und Flüssigkeiten . . . . .	1
2. D. Konstantinowsky. Über das Elementarquantum der Elektrizität und den photoelektrischen Effekt . . . . .	57
3. T. Heurlinger. Die Beziehungen zwischen den adiabatischen und isothermen Koeffizienten der galvano- und thermomagnetischen Effekte. . . . .	84
4. John Koch. Über eine neue Linienserie im Spektrum des einwertigen Heliums . . . . .	98
5. Karl L. Schaefer. Über eine einfache Methode zur Erzeugung akustisch empfindlicher Leuchtgasflammen . . . . .	109
6. G. Quincke. Durchbohrung von Glas mit elektrischen Funken und Strahlen. (Hierzu Tafel I—III.) . . . . .	118

*Ausgegeben am 28. September 1915.*

#### Achtzehntes Heft.

1. W. Voigt und V. Freedericksz. Theoretisches und Experimentelles zu der piezoelektrischen Erregung eines Kreiszylinders durch Drillung und Biegung . . . . .	145
2. O. Lehmann. Die Erzeugung von Bewegung durch molekulare Richtkraft bei flüssigen Kristallen. (Hierzu Tafel IV u. V.) . .	177
3. J. Stark. Beobachtungen über den Effekt des elektrischen Feldes auf Spektrallinien. V. Feinerlegung der Wasserstoffserie	193
4. J. Stark. Beobachtungen über den Effekt des elektrischen Feldes auf Spektrallinien. VI. Polarisierung und Verstärkung einer Serie . . . . .	210
5. G. E. Washburn. Der Einfluß der Magnetisierung auf den Gleichstromwiderstand des Graphits nach der Hauptachse . .	236

360052

	Seite
6. W. W. Strong. Elektrische Fällung, Stokessches Gesetz und die Beseitigung von Teilchen aus Flüssigkeiten . . . . .	251
7. A. Kalähne. Die schwingende Spule im Magnetfeld, ein Fall von gedämpften Sinusschwingungen mit nichtlinearem Hemenaggesetz . . . . .	261
8. H. Schultze †. Über das spezifische Gewicht des Argons . . . . .	269

Ausgegeben am 14. Oktober 1915.

#### Neunzehntes Heft.

1. S. Garten. Ein Schallschreiber mit sehr kleiner Seifenmembran. (Hierzu Tafel VI—VIII) . . . . .	273
2. Franz Tank. Über den Zusammenhang der dielektrischen Effektverluste von Kondensatoren mit den Anomalien der Ladung und der Leitung . . . . .	307
3. P. Ehrenfest. Zur Kapillaritätstheorie der Kristallgestalt . . . . .	360
4. P. Ehrenfest. Über die kinetische Interpretation des osmotischen Druckes . . . . .	369
5. Joseph Kramsztyk. Über die räumliche Verteilung der Lichtemission im elektrischen Bogen und Funken . . . . .	375
6. E. Warburg u. C. Müller. Über die Konstante $c$ des Wien-Planckschen Strahlungsgesetzes . . . . .	410

Ausgegeben am 29. Oktober 1915.

#### Zwanzigstes Heft.

1. W. Voigt. Über sekundäre Wirkungen bei piezoelektrischen Vorgängen, insbesondere im Falle der Drillung und Biegung eines Kreiszylinders . . . . .	433
2. Joseph Fassbinder. Die Leitung des elektrischen Stromes in Äthyläther . . . . .	449
3. E. A. Holm. Über eine modifizierte Fassung der Hypothese der molekularen Unordnung und des Äquipartitionsgesetzes der kinetischen Energie . . . . .	481
4. R. Gans. Die Koerzitivkraft von Stahl und Eisen in ihrer Abhängigkeit von der Temperatur . . . . .	514
5. A. Landé. Die Beugung endlicher Wellenzüge an einer Halbebene . . . . .	521
6. T. Retschinsky. Über die elektromagnetische und spektrale Analyse der Kanalstrahlen. (Hierzu Tafel IX—XII) . . . . .	546

Ausgegeben am 9. November 1915.

380025

Einundzwanzigstes Heft.

Seite

1. Erich Bannawitz. Über die Wärmeleitung des Neon . . . . . 577
2. Gustav Schweikert. Bestimmung der Schallgeschwindigkeit und des Verhältnisses der spezifischen Wärmen der Gase nach der Methode der Kundtschen Staubfiguren. (Hierzu Tafel XIII u. XIV.) . . . . . 593
3. M. v. Laue. Zur Statistik der Fourierkoeffizienten der natürlichen Strahlung . . . . . 668
4. Adolf Heydweiller. Neutralisationswärme und Quantentheorie . . . . . 681
5. Wilhelm Steinhausen. Untersuchung stehender Luftschwingungen (insbesondere in Flöte und Orgelpfeife). (Hierzu Tafel XV, XVI u. XVII.) . . . . . 693
6. Edgar Meyer u. Walther Gerlach. Über das Elementarquantum der Elektrizität und den photoelektrischen Effekt. (Antwort auf die gleichnamige Abhandlung von Hrn. Konstantinowsky.) . . . . . 718

*Ausgegeben am 30. November 1915.*

Zweiundzwanzigstes Heft.

1. O. Lehmann. Die Struktur schleimig-kristallinischer Flüssigkeiten . . . . . 725
2. G. Bakker. Oberflächenspannung und Krümmung der Kapillarschicht. Interpretation des labilen Teils der theoretischen Isotherme . . . . . 770
3. Arthur Gille. Die Koeffizienten der inneren Reibung bei Gemischen von Helium und Wasserstoff . . . . . 799
4. E. Rüchardt. Über Phosphoreszenzerregung durch Kanalstrahlen . . . . . 838

*Ausgegeben am 7. Dezember 1915.*

Dreiundzwanzigstes Heft.

1. A. Ernst. Über radioaktive Schwankungen bei Verwendung nichtgesättigter Ströme . . . . . 877
2. Erich Kretschmann. Über die prinzipielle Bestimmbarkeit der berechtigten Bezugssysteme beliebiger Relativitätstheorien (I) . . . . . 907
3. Erich Kretschmann. Über die prinzipielle Bestimmbarkeit der berechtigten Bezugssysteme beliebiger Relativitätstheorien (II) . . . . . 943
4. A. Magnus. Die spezifische Wärme des Platins und des Diamanten bei hohen Temperaturen . . . . . 983

*Ausgegeben am 21. Dezember 1915.*

## Vierundwanzigstes Heft.

	Seite
1. Alfred Coehn u. Josef Franken. Über die Berührungselektrizität fester Dielektrika gegen leitende und nichtleitende Flüssigkeiten . . . . .	1005
2. E. Warburg. Bekanntmachung über die Prüfung von Thermometern . . . . .	1084
3. Georg Krause. Über die Interferenzerscheinungen am Michelsonschen Interferometer . . . . .	1087
4. F. Himstedt. Über die absolute elektrooptische Verzögerung und Beschleunigung bei der elektrischen Doppelbrechung . .	1061
5. W. Wien. Über wahre Absorption der Kanalstrahlen . . .	1089
6. M. v. Smoluchowski. Zur Theorie der Zustandsgleichungen	1098
7. M. v. Smoluchowski. Über Brownsche Molekularbewegung unter Einwirkung äußerer Kräfte und deren Zusammenhang mit der verallgemeinerten Diffusionsgleichung . . . . .	1103
8. Martin Knudsen. Das Cosinusetz in der kinetischen Gastheorie . . . . .	1118
9. C. Dieterici. Bemerkungen zu der Arbeit des Hrn. G. Schweikert: Bestimmung der Schallgeschwindigkeit . . .	1122
Namenregister zum Jahrgang 1915 . . . . .	1125

Ausgegeben am 1. Februar 1916.

### Nachweis zu den Figurentafeln.

Tafel I bis III.	G. Quineke.
„ IV u. V.	O. Lehmann.
„ VI bis VIII.	S. Garten.
„ IX bis XII.	T. Retschinsky.
„ XIII u. XIV.	G. Schweikert.
„ XV bis XVII.	W. Steinhausen.

## ANNALEN DER PHYSIK.

## VIERTE FOLGE. BAND 48.

1. *Über die Wechselwirkung  
zwischen zwei elektrischen Dipolen und über  
die Drehung der Polarisationssebene  
in Kristallen und Flüssigkeiten;  
von C. W. Oseen.*

Die Drehung der Polarisationssebene, die man bei gewissen Kristallen wie z. B. Quarz beobachtet, kann man nach einem von Pasteur, Rammelsberger, Sohneke und anderen ausgesprochenen Gedanken durch eine schraubenförmige Anordnung der Kristallmoleküle in diesen Kristallen erklären. Dagegen ist, wie zuerst van't Hoff und Le Bel nachgewiesen haben, dieselbe Erscheinung bei vielen organischen Flüssigkeiten durch die Gegenwart eines asymmetrischen Kolutoms in dem chemischen Moleküle dieser Stoffe bedingt. In der vorliegenden Abhandlung mache ich den Versuch, aus diesen Hypothesen — wobei ich die zuletzt erwähnte so präzisiere, daß ein asymmetrisches Kolutom in den Ecken eines damit starr verbundenen Tetraeders vier Resonatoren tragen soll — unter Benutzung der Hilfsmittel der elektromagnetischen Theorie des Lichtes eine mathematische Theorie der Drehung der Polarisationssebene zu gestalten. Den Unterschied zwischen der hier vorgetragenen Theorie und anderen Theorien derselben Erscheinung habe ich hiermit schon angegeben. Sowohl die Drudesche Theorie wie die Lorentz-Livenssche Theorie haben im wesentlichen einen phänomenologischen Charakter. Das atomistisch gefärbte Bild, das Drude zur Versinnlichung seiner Theorie erdacht hat, ist schwerlich annehmbar.<sup>1)</sup> Weder die Drudesche noch die Lorentz-Livenssche Theorie gibt eine Antwort auf die Frage, warum die Drehung an das asym-

1) Dieses Urteil wird dadurch nicht modifiziert, daß Hr. K. F. Lindman neuerdings durch Untersuchungen im Gebiete der elektromagnetischen Wellen die Richtigkeit des Drudeschen Gedankens experimentell bestätigt hat.

metrische Kolatom geknüpft ist. — Dagegen ist meine Theorie ersichtlich mit der neuerdings von Hrn. Stark entwickelten qualitativen Theorie nahe verwandt.<sup>1. 2)</sup> |

Meiner Theorie liegen die Gesetze für die Wechselwirkung zwischen zwei elektrischen Dipolen zugrunde. Da in der Literatur vielfach unrichtige Angaben über dieses Thema zerstreut sind, widme ich dieser Frage einen ersten Paragraphen, um so mehr, da ich dadurch Gelegenheit bekomme, auf einen Punkt hinzuweisen, der meines Erachtens in der Strahlungstheorie noch nicht genügende Berücksichtigung gefunden hat.

Im zweiten Paragraphen gebe ich eine in methodischer Hinsicht neue Ableitung der Lorentzschen Theorie der Dispersion des Lichtes.

Im dritten Paragraphen behandle ich die Drehung der Polarisationssebene in gewissen Kristallen.

Den vierten Paragraphen widme ich schließlich der Drehung in organischen Flüssigkeiten oder Gasen.

Die prinzipielle Frage, die ich in dieser Abhandlung zu beantworten versuche, ist die, ob man die Drehung der Polarisationssebene *qualitativ* erklären kann, ohne den Rahmen der Maxwell-Lorentzschen Elektrodynamik zu überschreiten. Ich glaube diese Frage bejahend beantworten zu können. In *quantitativer* Hinsicht scheinen mir die Ergebnisse des letzten Paragraphen von Interesse zu sein. Sie zeigen, daß, selbst wenn man von allen Nebenerscheinungen (der Bildung und dem Zerfall von Molekülaggregaten usw.) absieht, die Drehung in einem Gemisch von aktiven und inaktiven Stoffen nicht additiv aus den von den einzelnen Komponenten hervorgerufenen Drehungen zusammengesetzt ist, daß aber in einer schwach absorbierenden Flüssigkeit die Drehung, durch

$$\left(2 + \frac{c^2}{q^2}\right)^2$$

dividiert, wo  $c = 3 \cdot 10^{10}$  cm/sec und wo  $q$  die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes in dem Gemisch ist, eine lineare Funktion der Konzentrationen der aktiven Kom-

1) Man vergleiche hierzu J. Stark, Prinzipien der Atomdynamik. III. p. 262ff. Leipzig 1915.

2) Noch viel größer ist die Verwandtschaft mit einer inzwischen (in Phys. Zeitschr.) erschienenen Untersuchung über denselben Gegenstand von Hrn. M. Born. (Zusatz bei der Korrektur.)

ponenten ist. Von den Resultaten des vierten Paragraphen möchte ich noch eines hervorheben. Ein Molekül, das in den Ecken eines irregulären Tetraeders vier isotrope Resonatoren derselben Art trägt, ergibt eine nicht verschwindende Drehung.

1. Über die Wechselwirkung zwischen zwei elektromagnetischen Resonatoren. — Die Schwingungsgleichung eines Resonators sei:

$$(1) \quad L \frac{d^2 \Phi}{dt^2} + M \frac{d\Phi}{dt} + K \Phi = C,$$

wo der Vektor  $\Phi$  das elektrische Moment des Resonators ist und wo  $C$  die erregende elektrische Kraft ist.<sup>1)</sup> Zur Bestimmung der Eigenschwingungen des Resonators erhalten wir dann die Gleichung:

$$L \frac{d^2 \Phi}{dt^2} + M \frac{d\Phi}{dt} + K \Phi = 0.$$

Wir befriedigen diese Gleichung durch den Ansatz:

$$\Phi = e^{-\frac{\gamma}{T}t} (A \sin \nu t + B \cos \nu t),$$

wo  $A$  und  $B$  beliebige Vektoren sind und wo:

$$\nu = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{K}{L} - \frac{M^2}{4L^2}}, \quad \gamma = \frac{M}{2L} T.$$

Wir wollen jetzt die Eigenschwingungen bei einem System von zwei Resonatoren untersuchen. Wir erhalten in leichtverständlicher Bezeichnung:

$$\begin{aligned} L_1 \frac{d^2 \Phi_1}{dt^2} + M_1 \frac{d\Phi_1}{dt} + K_1 \Phi_1 &= \text{rot}_1 \text{rot}_1 \frac{\Phi_2 \left( t - \frac{R_{12}}{c} \right)}{R_{12}} \\ &= -\frac{1}{c^2 R_{12}^3} \left[ \frac{d^2 \Phi_2}{dt^2} - \frac{R_{12}}{R_{12}^3} \left( R_{12} \times \frac{d^2 \Phi_2}{dt^2} \right) \right]_{t - \frac{R_{12}}{c}} \\ &\quad - \frac{1}{c R_{12}^3} \left[ \frac{d\Phi_2}{dt} - \frac{3 R_{12}}{R_{12}^3} \left( R_{12} \times \frac{d\Phi_2}{dt} \right) \right]_{t - \frac{R_{12}}{c}} \\ &\quad - \frac{1}{R_{12}^3} \left( \Phi_2 - \frac{3 R_{12}}{R_{12}^3} (R_{12} \times \Phi_2) \right)_{t - \frac{R_{12}}{c}}, \\ L_2 \frac{d^2 \Phi_2}{dt^2} + M_2 \frac{d\Phi_2}{dt} + K_2 \Phi_2 &= \text{rot}_2 \text{rot}_2 \frac{\Phi_1 \left( t - \frac{R_{12}}{c} \right)}{R_{12}}. \end{aligned}$$

1) Ich schließe mich in den Bezeichnungen möglichst nahe an Goldhammer, Dispersion und Absorption des Lichtes an. Leipzig, Teubner 1913.

Der Vektor  $\mathbf{R}_{12}$  weist von 1 nach 2. — Wir setzen:

$$\Phi_1 = \mathbf{A}_1 e^{i\omega t}, \quad \Phi_2 = \mathbf{A}_2 e^{i\omega t}$$

und bekommen:

$$\begin{aligned} (-L_1 \omega^2 + M_1 i\omega + K_1) \mathbf{A}_1 &= \left( \frac{\omega^2}{c^2 R_{12}^3} - \frac{i\omega}{c R_{12}^3} - \frac{1}{R_{12}^3} \right) \mathbf{A}_2 e^{-\frac{i\omega R_{12}}{c}} \\ &\quad - \frac{R_{12}}{R_{12}^3} \left( \frac{\omega^2}{c^2 R_{12}^3} - \frac{3i\omega}{c R_{12}^3} - \frac{3}{R_{12}^3} \right) (\mathbf{R}_{12} \times \mathbf{A}_2) e^{-\frac{i\omega R_{12}}{c}}, \\ (-L_2 \omega^2 + M_2 i\omega + K_2) \mathbf{A}_2 &= \left( \frac{\omega^2}{c^2 R_{12}^3} - \frac{i\omega}{c R_{12}^3} - \frac{1}{R_{12}^3} \right) \mathbf{A}_1 e^{-\frac{i\omega R_{12}}{c}} \\ &\quad - \frac{R_{12}}{R_{12}^3} \left( \frac{\omega^2}{c^2 R_{12}^3} - \frac{3i\omega}{c R_{12}^3} - \frac{3}{R_{12}^3} \right) (\mathbf{R}_{12} \times \mathbf{A}_1) e^{-\frac{i\omega R_{12}}{c}}. \end{aligned}$$

Wir nehmen der Einfachheit wegen an, daß:

$$L_1 = L_2 = L, \quad M_1 = M_2 = M, \quad K_1 = K_2 = K.$$

Wir multiplizieren unsere beiden Gleichungen skalar mit  $\mathbf{R}_{12}$  und erhalten:

$$\begin{aligned} (-L\omega^2 + Mi\omega + K)(\mathbf{R}_{12} \times \mathbf{A}_1) &= \frac{2}{R_{12}^3} \left( \frac{i\omega}{c} + \frac{1}{R_{12}} \right) e^{-\frac{i\omega R_{12}}{c}} (\mathbf{R}_{12} \times \mathbf{A}_2), \\ (-L\omega^2 + Mi\omega + K)(\mathbf{R}_{12} \times \mathbf{A}_2) &= \frac{2}{R_{12}^3} \left( \frac{i\omega}{c} + \frac{1}{R_{12}} \right) e^{-\frac{i\omega R_{12}}{c}} (\mathbf{R}_{12} \times \mathbf{A}_1). \end{aligned}$$

Also entweder:

$$(2) \quad -L\omega^2 + Mi\omega + K = \pm \frac{2}{R_{12}^3} \left( \frac{i\omega}{c} + \frac{1}{R_{12}} \right) e^{-\frac{i\omega R_{12}}{c}}$$

oder:

$$\mathbf{R}_{12} \times \mathbf{A}_1 = \mathbf{R}_{12} \times \mathbf{A}_2 = 0.$$

Im ersten Falle folgt:

$$\mathbf{R}_{12} \times \mathbf{A}_1 = \pm (\mathbf{R}_{12} \times \mathbf{A}_2)$$

und:

$$\left( \frac{\omega^2}{c^2 R_{12}^3} + \frac{i\omega}{c R_{12}^3} + \frac{1}{R_{12}^3} \right) e^{-\frac{i\omega R_{12}}{c}} (\mathbf{A}_1 \mp \mathbf{A}_2) = 0.$$

Also (sofern nicht:

$$\frac{\omega^2}{c^2} + \frac{i\omega}{c R_{12}} + \frac{1}{R_{12}^3} = 0):$$

$$\mathbf{A}_1 = \pm \mathbf{A}_2$$



und hieraus:

$$\left( \frac{\omega^2}{c^2 R_{12}} - \frac{3i\omega}{c R_{12}} - \frac{3}{R_{12}^2} \right) \left\{ \mathbf{A}_2 - \frac{R_{12}}{R_{12}^2} (R_{12} \times \mathbf{A}_2) \right\} = 0,$$

d. h. (sofern nicht:

$$\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{3i\omega}{c R_{12}} - \frac{3}{R_{12}^2} = 0)$$

$$\mathbf{R}_{12} \wedge \mathbf{A}_2 = 0$$

und in derselben Weise:

$$\mathbf{R}_{12} \wedge \mathbf{A}_1 = 0.$$

Im zweiten Falle folgt:

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} -L\omega^2 + M i \omega + K &= \pm \left( \frac{\omega^2}{c^2 R_{12}} - \frac{i\omega}{c R_{12}^2} - \frac{1}{R_{12}^3} \right) e^{-\frac{i\omega R_{12}}{c}}, \\ \mathbf{A}_1 &= \pm \mathbf{A}_2, \quad \mathbf{R}_{12} \times \mathbf{A}_1 = \mathbf{R}_{12} \times \mathbf{A}_2 = 0. \end{aligned} \right.$$

Die Gleichungen (2) und (3) bestimmen die Frequenzen:  $Re(\omega)$  der Eigenschwingungen unseres Systems. Da diese Gleichungen transzendent sind, so besitzt unser System im allgemeinen unendlich viele Eigenschwingungen. Die Frequenzen dieser Schwingungen häufen sich, wie man leicht sieht, im Unendlichen, d. h. es gibt unendlich viele Eigenschwingungen, deren Frequenzen größer als eine beliebig vorgegebene, positive Zahl sind.

Wir wollen jetzt zeigen, wie man eine beliebige kräftefreie Schwingung mittels der Eigenschwingungen ausdrücken kann. Wir beschränken uns dabei auf den Fall, wo die Resonatoren parallel zueinander und senkrecht gegen  $\mathbf{R}_{12}$  schwingen. Die Schwingungsgleichungen sind dann:

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} L \frac{d^2 \Phi_1}{dt^2} + M \frac{d \Phi_2}{dt} + K \Phi_1 &= - \left( \frac{1}{c^2 R_{12}} \frac{d^2 \Phi_2}{dt^2} + \frac{1}{c R_{12}^2} \frac{d \Phi_2}{dt} + \frac{1}{R_{12}^3} \Phi_2 \right) e^{-\frac{R_{12}}{c}}, \\ L \frac{d^2 \Phi_2}{dt^2} + M \frac{d \Phi_1}{dt} + K \Phi_2 &= - \left( \frac{1}{c^2 R_{12}} \frac{d^2 \Phi_1}{dt^2} + \frac{1}{c R_{12}^2} \frac{d \Phi_1}{dt} + \frac{1}{R_{12}^3} \Phi_1 \right) e^{-\frac{R_{12}}{c}}. \end{aligned} \right.$$

Neben diesen Gleichungen betrachten wir die folgenden, welche die Rolle von adjungierten Gleichungen spielen:

$$(5) \quad \begin{cases} L \frac{d^2 \Psi_1}{dt^2} - M \frac{d \Psi_2}{dt} + K \Psi_1 = - \left( \frac{1}{c^2 R_{12}} \frac{d^2 \Psi_2}{dt^2} + \frac{1}{c R_{12}^3} \frac{d \Psi_2}{dt} \right. \\ \quad \left. + \frac{1}{R_{12}^3} \Psi_2 \right)_{t + \frac{R_{12}}{c}}, \\ L \frac{d^2 \Psi_2}{dt^2} - M \frac{d \Psi_1}{dt} + K \Psi_2 = - \left( \frac{1}{c^2 R_{12}} \frac{d^2 \Psi_1}{dt^2} + \frac{1}{c R_{12}^3} \frac{d \Psi_1}{dt} \right. \\ \quad \left. + \frac{1}{R_{12}^3} \Psi_1 \right)_{t + \frac{R_{12}}{c}}. \end{cases}$$

Man zeigt leicht, daß wenn  $\Phi_1, \Phi_2, \Psi_1, \Psi_2$  reguläre Lösungen dieser Gleichungen sind, die Größe:

$$\begin{aligned} J(\Phi_1, \Phi_2; \Psi_1, \Psi_2) \\ = L \left\{ \frac{d \Phi_1}{dt} \Psi_1 - \Phi_1 \frac{d \Psi_1}{dt} + \frac{d \Phi_2}{dt} \Psi_2 - \Phi_2 \frac{d \Psi_2}{dt} \right\}_t \\ + M(\Phi_1 \Psi_1 + \Phi_2 \Psi_2)_t + \frac{1}{c^2 R_{12}} \left\{ \left( \frac{d \Phi_1}{dt} \right)_t - \frac{R_{12}}{c} \Psi_{1t} \right. \\ \left. - \Phi_{2t} - \frac{R_{12}}{c} \left( \frac{d \Psi_1}{dt} \right)_t + \left( \frac{d \Phi_1}{dt} \right)_t - \frac{R_{12}}{c} \Psi_{2t} - \Phi_{1t} - \frac{R_{12}}{c} \left( \frac{d \Psi_2}{dt} \right)_t \right\} \\ + \frac{1}{c R_{12}^3} \left\{ \Phi_{2t} - \frac{R_{12}}{c} \Psi_{1t} + \Phi_{1t} - \frac{R_{12}}{c} \Psi_{2t} \right\} \\ + \int_{t - \frac{R_{12}}{c}}^t \left( L \frac{d^2 \Psi_1}{dt^2} - M \frac{d \Psi_2}{dt} + K \Psi_1 \right)_t \Phi_{1t} dt \\ + \int_{t - \frac{R_{12}}{c}}^t \left( L \frac{d^2 \Psi_2}{dt^2} - M \frac{d \Psi_1}{dt} + K \Psi_2 \right)_t \Phi_{2t} dt \end{aligned}$$

einen von  $t$  unabhängigen Wert hat. Man hat insbesondere, wenn  $\omega_1$  und  $\omega_2$  der Gleichung

$$(6) \quad -L\omega^2 + M i \omega + K = \left( \frac{\omega^2}{c^2 R_{12}} - \frac{i \omega}{c R_{12}^3} - \frac{1}{R_{12}^3} \right) e^{-\frac{i \omega R_{12}}{c}}$$

genügen:

$$J(e^{i \omega_1 t}, e^{i \omega_1 t}; e^{-i \omega_1 t}, e^{-i \omega_1 t}) = 0,$$

wenn  $\omega_1 \neq \omega_2$ , aber:

$$\begin{aligned} J(e^{i \omega_1 t}, e^{i \omega_1 t}; e^{-i \omega_1 t}, e^{-i \omega_1 t}) \\ = 2i \left\{ 2L\omega_1 - iM + \left( \frac{2\omega_1}{c^2 R_{12}} + \frac{1}{c R_{12}^3} \right) e^{-\frac{i \omega_1 R_{12}}{c}} \right. \\ \left. - \frac{i R_{12}}{c} \left( \frac{\omega_1^2}{c^2 R_{12}} - \frac{i \omega_1}{c R_{12}^3} - \frac{1}{R_{12}^3} \right) e^{-\frac{i \omega_1 R_{12}}{c}} \right\}. \end{aligned}$$

Wenn  $\omega_1$  eine Wurzel der Gleichung (6) und  $\omega_2$  der Gleichung:

$$(7) \quad -L\omega^2 + Mi\omega + K = -\left(\frac{\omega^2}{c^2 R_{12}} - \frac{i\omega}{c R_{12}^2} - \frac{1}{R_{12}^3}\right) e^{-\frac{i\omega R_{12}}{c}}$$

ist, so hat man stets:

$$J(e^{i\omega_1 t}, e^{i\omega_1 t}; e^{-i\omega_2 t}, -e^{-i\omega_2 t}) = 0.$$

Ebenso hat man stets:

$$J(e^{i\omega_2 t}, -e^{i\omega_2 t}; e^{-i\omega_1 t}, e^{-i\omega_1 t}) = 0.$$

Wenn endlich  $\omega_1$  und  $\omega_2$  beide der Gleichung (7) genügen, so hat man:

$$J(e^{i\omega_1 t}, -e^{i\omega_1 t}; e^{-i\omega_2 t}, -e^{-i\omega_2 t}) = 0,$$

wenn  $\omega_1 \neq \omega_2$ , aber:

$$\begin{aligned} & J(e^{i\omega_1 t}, -e^{i\omega_1 t}; e^{-i\omega_1 t}, e^{-i\omega_1 t}) \\ &= 2i \left\{ 2L\omega_1 - iM - \left( \frac{2\omega_1}{c^2 R_{12}} + \frac{1}{c R_{12}^2} \right) e^{-\frac{i\omega_1 R_{12}}{c}} \right. \\ & \quad \left. + \frac{i R_{12}}{c} \left( \frac{\omega_1^2}{c^2 R_{12}} - \frac{i\omega_1}{c R_{12}^2} - \frac{1}{R_{12}^3} \right) e^{-\frac{i\omega_1 R_{12}}{c}} \right\}. \end{aligned}$$

Wir stellen uns jetzt die Aufgabe, Funktionen  $\Phi_1(t)$  und  $\Phi_2(t)$  zu bestimmen, die für  $t > t_1$  den Gleichungen (4) genügen und für  $t_1 - R_{12}/c \leq t \leq t_1$  vorgeschriebene, stetige und differenzierbare Werte annehmen. Wir machen den Ansatz:

$$\Phi_1 = \sum_n A_n e^{i\omega_n t} + \sum_{n'} A_{n'} e^{i\omega_{n'} t},$$

$$\Phi_2 = \sum_n A_n e^{i\omega_n t} - \sum_{n'} A_{n'} e^{i\omega_{n'} t},$$

wo  $\omega_n$  die Wurzeln der Gleichung (6) und  $\omega_{n'}$  diejenigen der Gleichung (7) durchlaufen soll. Wir bilden den Ausdruck:

$$J(\Phi_1, \Phi_2; e^{-i\omega_m t}, e^{-i\omega_m t})_{t=t_1}$$

und erhalten, wenn unsere Reihen für  $\Phi_1$  und  $\Phi_2$  im Intervall  $t_1 - R_{12}/c \leq t \leq t_1$  gleichmäßig konvergieren:

$$\begin{aligned} & J(\Phi_1, \Phi_2; e^{-i\omega_m t}, e^{-i\omega_m t})_{t=t_1} \\ &= A_m J(e^{i\omega_m t}, e^{i\omega_m t}; e^{-i\omega_m t}, e^{-i\omega_m t}). \end{aligned}$$

Wir erhalten ebenso:

$$J(\Phi_1, \Phi_2; e^{-i\omega_m' t}, -e^{-i\omega_m' t})_{t=t_1} \\ = A_m J(e^{i\omega_m' t}, -e^{i\omega_m' t}; e^{-i\omega_m' t}, e^{-i\omega_m' t}).$$

Diese Gleichungen dienen zur Bestimmung von  $A_m$  und  $A_m^1$ .

Die Bedeutung der unendlich vielen Eigenschwingungen geht aus dem Obigen deutlich hervor. Um  $\Phi_1$  und  $\Phi_2$  berechnen zu können, muß man ihre Werte in einem endlichen Intervall kennen. Die unendlich vielen Eigenschwingungen dienen zur Darstellung der (mit gewissen Beschränkungen) willkürlichen Werte von  $\Phi_1$  und  $\Phi_2$  in diesem Intervall.

Es erregte allgemeine Aufmerksamkeit, als man vor einigen Jahren fand, daß ein kugelförmiges, starres Elektron kräftefreie Schwingungen ausführen kann. Man hoffte anfangs, auf diese oder ähnliche Weise die Entstehung der Spektrallinien erklären zu können. Es stellte sich aber alsbald heraus, daß die Frequenzen dieser Schwingungen viel zu hoch liegen, damit dies möglich sei. Später hat man in diesen hochfrequenten Schwingungen eine theoretische Schwierigkeit gefunden. Besonders klar ist in dieser Hinsicht eine Stelle bei Ritz<sup>1)</sup>, die ich deshalb hier zitiere:

„Allgemeiner dürfte die Lösung bei beliebigen Systemen beweglicher Elektronen ebenfalls zu ihrer Bestimmung unendlich vieler Konstanten bedürfen und oszillierende Lösungen von unbegrenzt kleiner Wellenlänge zulassen. Diese sind eben durch die unendlich vielen ‚Freiheitsgrade des Äthers‘ bedingt; und es ist zu befürchten, daß sie, auf Grund des Satzes der gleichförmigen Verteilung der Energie, schließlich doch wieder eine Tendenz der Strahlung, ganz auf die kürzesten Wellenlängen sich zu konzentrieren, bewirken möchten, wenn auch die Formel vielleicht eine von der Jeansschen abweichende Gestalt hätte. Aber auch ohne diese Betrachtung muß die Existenz z. B. der kräftefreien Eigenschwingungen des Elektrons, die sich jeder Lösung superponieren lassen und nach denen sich jede Lösung entwickeln läßt, die also überall auftreten müssen, als experimentell unwahrscheinlich betrachtet werden. Sollte auch eine Strahlung von äußerst kurzer Wellenlänge unseren Beobachtungsmethoden unzugänglich sein, so müßte sich doch ein entsprechender merk-

1) W. Ritz, Oeuvres p. 499f.

licher Energiedefekt zeigen, der nirgends wahrgenommen wurde.“

„Man darf vielleicht schließen, daß, ebenso wie wir schon gezeigten waren, die Mannigfaltigkeit der Lösungen der Maxwellschen Theorie durch die Einführung der retardierten Potentiale außerordentlich herabzusetzen, eine neue derartige Beschränkung noch nötig ist, um die Anzahl der Bestimmungselemente (Konstanten) der Lösungen auf eine endliche zu reduzieren.“<sup>1)</sup>

Das einfache Problem, das wir hier behandeln, scheint mir wohl geeignet zu sein, die Bedeutung der unendlich vielen Eigenschwingungen klarzulegen. Es zeigt, daß diese Eigenschwingungen eine notwendige Folge der Annahme sind, daß die elektrische Kraft eine endliche Fortpflanzungsgeschwindigkeit besitzt. Da man wohl niemals diese Annahme aufgeben wird, so muß man die hochfrequenten Eigenschwingungen in den Kauf nehmen. Eine Beschränkung, wie sich Ritz dachte, ist unmöglich.

Mit einigen Worten muß ich die Frage berühren, ob die einzelnen Glieder in unseren Reihen für  $\Phi_1$  und  $\Phi_2$  an sich eine physikalische Bedeutung besitzen. Das würde ersichtlich der Fall sein, wenn die Gleichung (1) streng gültig wäre. Dem ist aber keineswegs so. Experimentelle Tatsachen und theoretische Gründe machen diese Annahme unmöglich.

Man sieht hieraus, wie unmöglich es ist, eine Strahlungstheorie auf der der Dispersionstheorie entnommenen Gleichung (1) zu begründen. Wenn wir die Strahlung in einem Körper untersuchen wollen, haben wir es mit einem ganzen System von Resonatoren zu tun. Wir können uns dann nicht auf die Eigenschwingungen der einzelnen Resonatoren beschränken. Wir müssen die Eigenschwingungen des Systems in Betracht ziehen. Diese liegen aber zum größten Teile im äußersten ultravioletten. Aber Näheres können wir über diese Eigenschwingungen nicht aussagen. Wie sich unsere Resonatoren solchen hochfrequenten Schwingungen gegenüber verhalten, davon wissen wir sehr wenig.

Ich schalte hier eine Bemerkung ein. Die üblichen Beweise für den Maxwell-Boltzmannschen Satz von der

1) Kursiviert von Ritz.

Äquipartition der Energie nehmen an, daß die potentielle Energie eine bestimmte Funktion der Koordinaten sind, die die Lage des Systems festlegen. Sie nehmen also an, daß man ohne merklichen Fehler so rechnen kann, als ob die Fortpflanzungsgeschwindigkeit unendlich groß wäre. In der Gas-theorie, wo die Atome nur während der Stöße Kräfte aufeinander ausüben, ist diese Annahme unbedenklich. Ob sie aber im allgemeinen Falle erlaubt ist, scheint mir zweifelhaft. — Bekanntlich hat H. A. Lorentz den Satz von der Äquipartition unter Berücksichtigung der Strahlung zu beweisen versucht.<sup>1)</sup> Dieser Beweis ist aber nicht zwingend. Prof. Lorentz sieht sich in der Tat genötigt, die Hypothese einzuführen, daß die sehr kurzwelligen Schwingungen keine Rolle spielen. D. h. eben diejenigen Schwingungen, die die notwendige Folge der endlichen Fortpflanzungsgeschwindigkeit, d. h. der Strahlung sind, schaltet Prof. Lorentz aus. Ob der Satz bei völliger Berücksichtigung der Strahlung bestehen bleibt, ist unter diesen Umständen noch unentschieden.

Wir wollen jetzt diejenigen Eigenschwingungen unseres Systems untersuchen, die den Eigenschwingungen der einzelnen Resonatoren am nächsten liegen. Mit dieser Aufgabe hat sich früher V. W. Ekman beschäftigt.<sup>2)</sup> Um unsere Ergebnisse mit Hrn. Ekmans vergleichen zu können, wollen wir unsere Schwingungsgleichung (1) erweitern, indem wir das von der Strahlung herrührende Dämpfungsglied expliziert ausschreiben. Die Schwingungsgleichung eines Resonators sei also jetzt:

$$L \frac{d^2 \Phi}{dt^2} + M \frac{d \Phi}{dt} + K \Phi - \frac{2}{3c^3} \frac{d^3 \Phi}{dt^3} = C.$$

Wir nehmen an, daß:

$$\frac{2\pi}{3c^3} \sqrt{\frac{K}{L^3}} = \sigma_1 \quad \text{und} \quad \frac{\pi M}{\sqrt{KL}} = \sigma_2$$

kleine Größen sind. Wir erhalten dann für die Eigenschwingungen eines Resonators:

$$\Phi = e^{-\frac{\gamma}{T} t} (A \sin \nu t + B \cos \nu t),$$

1) Langevin et de Broglie, La théorie du rayonnement et des quanta. p. 12—39. Paris 1912.

2) V. W. Ekman, Über Resonanz durch Strahlung. Ann. d. Phys. 24. p. 267. 1907.

wo:

$$\nu = \sqrt{\frac{K}{L}}, \quad \gamma = \frac{2\pi}{\nu} \left( \frac{K}{3c^3 L^3} + \frac{M}{2L} \right) = \sigma_1 + \sigma_2.$$

Wir untersuchen wieder die Eigenschwingungen bei einem System von zwei Resonatoren und erhalten für die gegen  $R_{12}$  senkrechten Schwingungen:

$$\begin{aligned} L \frac{d^2 \Phi_1}{dt^2} + M \frac{d \Phi_1}{dt} + K \Phi_1 - \frac{2}{3c^3} \frac{d^3 \Phi_1}{dt^3} \\ = - \left( \frac{1}{c^3 R_{12}} \frac{d^3 \Phi_1}{dt^3} + \frac{1}{c R_{12}^3} \frac{d \Phi_2}{dt} + \frac{1}{R_{12}^3} \Phi_2 \right)_t - \frac{R_{12}}{c}, \\ L \frac{d^2 \Phi_2}{dt^2} + M \frac{d \Phi_2}{dt} + K \Phi_2 - \frac{2}{3c^3} \frac{d^3 \Phi_2}{dt^3} \\ = - \left( \frac{1}{c^3 R_{12}} \frac{d^3 \Phi_1}{dt^3} + \frac{1}{c R_{12}^3} \frac{d \Phi_1}{dt} + \frac{1}{R_{12}^3} \Phi_1 \right)_t - \frac{R_{12}}{c} \end{aligned}$$

oder, wenn wir

$$\Phi_1 = A_1 e^{i\omega t}, \quad \Phi_2 = A_2 e^{i\omega t}$$

setzen:

$$(8) \quad \begin{cases} -L\omega^2 + Mi\omega + K + \frac{2i}{3c^3}\omega^3 \\ = \pm \left( \frac{\omega^3}{c^3 R_{12}} - \frac{i\omega}{c R_{12}^3} - \frac{1}{R_{12}^3} \right) e^{-\frac{i\omega R_{12}}{c}}, \\ A_1 = \pm A_2. \end{cases}$$

Wenn:

$$(9) \quad \frac{3\sigma_1}{4\pi\nu R_{12}} \sqrt{1 - \frac{c^2}{\nu^3 R_{12}^3} + \frac{c^4}{\nu^4 R_{12}^4}}$$

eine kleine Größe ist, so erhalten wir mit genügender Annäherung:

$$\omega = \nu \left\{ 1 + \frac{1}{2\pi} (\sigma_1 + \sigma_2) i \mp \frac{3\sigma_1}{4\pi\nu R_{12}} \left( 1 - \frac{c^2}{\nu^3 R_{12}^3} - \frac{c^2}{\nu^3 R_{12}^3} \right) e^{-\frac{i\nu R_{12}}{c}} \right\}$$

oder, wenn wir

$$\frac{3}{2} \frac{c}{\nu R_{12}} \left( 1 - \frac{c^2}{\nu^3 R_{12}^3} - \frac{c^2}{\nu^3 R_{12}^3} \right) e^{-\frac{i\nu R_{12}}{c}} = b e^{i\nu}$$

setzen:

$$\omega = \nu \left( 1 \mp \frac{1}{2\pi} b \sigma_1 \cos \nu \right) + \frac{\nu i}{2\pi} \left\{ \sigma_1 (1 \mp b \sin \nu) + \sigma_2 \right\}.$$

Die Frequenzen unserer Schwingungen sind also:

$$(10) \quad \nu \left\{ 1 \mp \frac{1}{2\pi} b \sigma_1 \cos \nu \right\}$$

und die logarithmischen Dekremente:

$$(11) \quad \sigma_1 (1 \mp b \sin v) + \sigma_2.$$

Wenn  $\nu R_{12}/c$  eine kleine GröÙe ist, so hat man annähernd:  
 $b \sin v = 1$ . Dagegen hat man:

$$b \cos v = \frac{3}{2} \left( \frac{c}{\nu R_{12}} \right)^3.$$

Wenn die GröÙe (9) nicht klein ist, so gelten diese Formeln nicht. Dieser Fall kann ersichtlich nur dann eintreten, wenn  $c/\nu R_{12}$  eine große Zahl ist, d. h. wenn der Abstand zwischen den Resonatoren ein kleiner Bruchteil der Wellenlänge der einzelnen Resonatoren ist. Wir haben dann:

$$\left( \frac{\omega^3}{c^3 R_{12}} - \frac{i \omega}{c R_{12}} - \frac{1}{R_{12}^3} \right) e^{-\frac{i \omega R_{12}}{c}} = -\frac{1}{R_{12}^3} - \frac{\omega^3}{2c^3 R_{12}^3} - \frac{2}{3} \frac{i \omega^3}{c^3} \\ - \frac{3}{8} \frac{\omega^4 R_{12}}{c^4} + \frac{2}{15} \frac{i \omega^5 R_{12}^3}{c^5} + \dots$$

Zur Bestimmung von  $\omega$  erhalten wir also die Gleichung:

$$(12) \quad \left\{ - \left( L \mp \frac{1}{2c^3 R_{12}} \right) \omega^3 + M i \omega + K \pm \frac{1}{R_{12}^3} + \frac{2i \omega^3}{3c^3} (1 \pm 1) \right. \\ \left. \mp \frac{2}{15} \frac{i \omega^5 R_{12}^3}{c^5} = 0. \right.$$

Wenn:

$$R_{12} \geq \frac{1}{K^{1/3}},$$

so folgt:

$$\frac{1}{2c^3 R_{12}} \leq \frac{K^{1/3}}{2c^3} = \frac{L}{2} \left( \frac{3\sigma_1}{2\pi} \right)^{1/3}.$$

Wir können dann das Glied:

$$\frac{1}{2c^3 R_{12}} \quad \text{neben } L$$

vernachlässigen. Wir haben also annähernd:

$$-L \omega^3 + M i \omega + K \pm \frac{1}{R_{12}^3} = 0$$

oder:

$$\omega = \frac{M}{2L} i \pm \frac{1}{2L} \sqrt{4L \left( K \pm \frac{1}{R_{12}^3} \right) - M^2}.$$

Die Frequenzen der beiden Schwingungen sind also:

$$\sqrt{\frac{1}{L} \left( K \pm \frac{1}{R_{12}^3} \right) - \frac{1}{4} \frac{M^2}{L}}.$$



Wenn:

$$\frac{1}{R_{12}^3} = \frac{1}{R'^3} = K - \frac{M^2}{4L},$$

nimmt die eine dieser Frequenzen den Wert Null an. Wenn

$$R' \geq R_{12} \geq R'',$$

wo:

$$\frac{1}{R''^3} = K,$$

so besitzt unser System eine aperiodische Eigenschwingung. Wenn endlich  $R_{12} < R''$ , so ist das System labil. Es ist dann nicht mehr erlaubt, die Amplituden der Schwingungen als klein neben dem Abstände zwischen den Resonatoren zu betrachten.

Prof. Ekman gelangt in seiner Untersuchung zu Formeln, die mit unseren Gleichungen (10) und (11) gleichbedeutend sind, wenn man dort  $M = 0$  setzt. Hr. Ekman bemerkt, daß die Formel (10) bei genügend kleinen Werten von  $\nu R_{12}/c$  einen negativen Wert für die Frequenz ergibt und schließt hieraus, daß es, wenn  $\nu R_{12}/c$  sehr klein ist, nicht mehr erlaubt ist, die Amplituden der Schwingungen als klein neben  $R_{12}$  zu betrachten. Hr. Ekman glaubt auf diese Weise auf eine Beziehung zwischen der Länge eines linearen Oszillators und dessen logarithmischen Dekrement schließen zu können. Ebenso glaubt Hr. Ekman hierdurch den Widerspruch zwischen seiner Theorie und der gewöhnlichen Resonanztheorie (die dadurch gekennzeichnet wird, daß nach ihr die beiden Eigenschwingungen dasselbe Dekrement haben sollen) erklären zu können. Dies soll nämlich der Fall sein, wenn die Amplituden von derselben Größenordnung wie die Entfernung  $R_{12}$  ist.

Wir ersehen aus dem Obigen, daß die Formel (10) nur in einem beschränkten Bereich annähernde Gültigkeit besitzt und daß es unmöglich ist, aus der Tatsache, daß sie außerhalb dieses Bereiches zu widersinnigen Resultaten führt, irgendeine physikalische Schlußfolgerung zu ziehen. Wir ersehen ferner, daß der Widerspruch zwischen der gewöhnlichen Resonanztheorie und der Ekmanschen Theorie darauf beruht, daß Prof. Ekman  $M = 0$  setzt, während die gewöhnliche Resonanztheorie  $\sigma_1$  neben  $\sigma_2$  klein annimmt.

Für eine grüne Spektrallinie haben wir etwa:  $\lambda = 5 \cdot 10^{-5}$  cm.

Nach Hrn. Abraham haben wir ferner für diese Wellenlänge  $\sigma = 5 \cdot 10^{-8}$ . Dies ergibt:

$$K = 8 \cdot 10^{22} \text{ cm}^{-3}.$$

Die kleinste Entfernung, in welcher zwei Resonatoren dieser Art noch harmonische Schwingungen ausführen können, die senkrecht gegen die Verbindungslinie verlaufen, ist also etwa:

$$80 \cdot \frac{1}{2} \cdot 10^{-7} = 2,3 \cdot 10^{-8} \text{ cm.}$$

Für die mit  $R_{12}$  parallelen Schwingungen erhalten wir die Gleichungen:

$$-L\omega^2 + Mi\omega + K + \frac{2i\omega^3}{3c^3} = \pm \frac{2}{R_{12}^3} \left( \frac{i\omega}{c} + \frac{1}{R_{12}} \right) e^{-\frac{i\omega R_{12}}{c}},$$

$$A_1 = \pm A_2.$$

Wenn:

$$(13) \quad \frac{3\sigma_1}{2\pi} \frac{c^3}{\nu^2 R_{12}^3} \sqrt{1 + \frac{c^3}{\nu^2 R_{12}^3}}$$

eine kleine Größe ist, so haben wir mit genügender Annäherung:

$$\omega = \nu \left\{ 1 + \frac{i}{2\pi} (\sigma_1 + \sigma_2) \mp \frac{1}{L\nu^3 R_{12}^3} \left( \frac{i\nu}{c} + \frac{1}{R_{12}} \right) e^{\mp \frac{i\nu R_{12}}{c}} \right\}.$$

Wenn dagegen die Größe (13) nicht klein ist, so erhalten wir:

$$(14) \quad -L\omega^2 + Mi\omega + K + \frac{2i\omega^3}{3c^3} = \pm \left( \frac{2}{R_{12}^3} - \frac{2i\omega^3}{3c^3} + \frac{i\omega^5}{15c^5} \right)$$

oder annähernd:

$$-L\omega^2 + Mi\omega + K \mp \frac{2}{R_{12}^3} = 0.$$

Also:

$$\omega = \frac{Mi}{2L} \pm \frac{1}{2L} \sqrt{4L \left( K \mp \frac{2}{R_{12}^3} \right) - M^2}.$$

Wenn

$$R_{12} < \left( \frac{2}{K} \right)^{1/3},$$

ist das System labil.

Die Gleichungen (12) und (14) zeigen, daß auch in dem Fall, wo  $M = 0$  und wo die Phasendifferenz zwischen den beiden Resonatoren den Wert  $\pi$  hat, die Strahlungsdämpfung niemals verschwindet. Eine gelegentliche Bemerkung von H. A. Lorentz, daß in diesem Fall keine Ausstrahlung statt-

findet und folglich kein Strahlungswiderstand vorhanden ist, ist unrichtig.<sup>1)</sup>

2. *Über die Dispersion des Lichtes.* — Die Grundgleichungen der elektromagnetischen Theorie der Dispersion des Lichtes sind<sup>2)</sup>:

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} L_j \frac{d^2 \Phi_j}{dt^2} + M_j \frac{d \Phi_j}{dt} + K_j \Phi_j &= C_j \\ j &= 1, 2 \dots p. \end{aligned} \right.$$

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} C_e(P) &= C_0(P) + \text{rot}_P \text{rot}_P \sum_1^p (j) \sum_{(P')} \frac{\Phi_j \left( t - \frac{R}{c} \right)}{R}. \end{aligned} \right.$$

Hier ist  $C_e$  die erregende elektrische Kraft,  $C_0$  die äußere elektrische Kraft, die also den Maxwell'schen Gleichungen für das Vakuum genügen muß.  $R$  ist der Vektor  $P - P'$ . Die zweite Summation in (2) erstreckt sich über die Resonatoren  $j$ ter Gattung, die im Raume zerstreut sind. Selbstverständlich soll rechts in (1) dasjenige Glied weggelassen werden, das einen unendlich großen Wert annehmen würde.

$N_j$  sei die Zahl der Resonatoren  $j$ ter Gattung pro Volumeneinheit. Wir versuchen (1) und (2) durch den Ansatz:

$$(3) \quad \Phi_j(P) = \frac{\Psi_j(P)}{N_j} e^{i\omega t}$$

zu genügen, wo  $\Psi_j(P)$  eine im ganzen Raume geklärte, stetige und beliebige oft stetig differenzierbare Vektorfunktion ist. (1) und (2) enthalten nur die Werte dieser Funktion in denjenigen Punkten, wo es Resonatoren gibt. Wenn wir annehmen, daß der mittlere Abstand zwischen zwei angrenzenden Resonatoren derselben Gattung klein neben  $2\pi c/\omega$  ist, können wir indessen diese Gleichungen leicht in eine solche Form bringen, daß sie die Werte der Funktionen  $\Psi$  in einem endlichen Bereich des Raumes enthalten.  $R_0$  sei eine Länge, die neben dem soeben erwähnten Abstände groß ist, aber neben  $2\pi c/\omega$  klein ist. Wir haben dann annähernd:

1) H. A. Lorentz, Alte und neue Fragen der Physik. Physik. Zeitschr. 11. p. 1251. 1910. Man vergleiche auch E. Marx, Theorie der Akkumulation der Energie, Ann. d. Phys. 41. p. 177. 1913.

2) Man vergleiche die oben angeführte Arbeit von Goldhammer p. 24. Man sehe auch: W. Wien, Die elektromagnetische Theorie des Lichtes, Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften 5.

$$\sum_{R > R_0}^{(P')} \frac{\Phi_j \left( t - \frac{R}{c} \right)}{R} = \int_{R > R_0} \frac{\Phi_j \left( t - \frac{R}{c} \right)}{R} N_j d\omega_{P'} \\ = \int_{R > R_0} \Psi_j(P') \frac{e^{i\omega \left( t - \frac{R}{c} \right)}}{R} d\omega_{P'}.$$

Wir wollen dieses Raumintegral in eine Summe von Flächenintegralen umwandeln. Wir haben:

$$\Delta_{P'} \frac{e^{i\omega \left( t - \frac{R}{c} \right)}}{R} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{e^{i\omega \left( t - \frac{R}{c} \right)}}{R} = -\frac{\omega^2}{c^2} \frac{e^{i\omega \left( t - \frac{R}{c} \right)}}{R}.$$

Also:

$$J_j = \int_{R > R_0} \Psi_j(P') \frac{e^{i\omega \left( t - \frac{R}{c} \right)}}{R} d\omega_{P'} = -\frac{c^2}{\omega^2} \int_{R > R_0} \Psi_j(P') \Delta_{P'} \frac{e^{i\omega \left( t - \frac{R}{c} \right)}}{R} d\omega_{P'} \\ = -\frac{c^2}{\omega^2} \int_{R > R_0} \frac{e^{i\omega \left( t - \frac{R}{c} \right)}}{R} \Delta_{P'} \Psi_j(P') d\omega_{P'} \\ - \frac{c^2}{\omega^2} \int \left( \Psi_j \frac{d}{dN_{P'}} \frac{e^{i\omega \left( t - \frac{R}{c} \right)}}{R} - \frac{e^{i\omega \left( t - \frac{R}{c} \right)}}{R} \frac{d\Psi_j}{dN_{P'}} \right) d\sigma_{P'},$$

wo das letzte Integral über die äußere Grenzfläche,  $F$ , des Körpers und über die Kugel  $R = R_0$  erstreckt werden soll und wo  $N$  die nach außen gezogene Normale ist.

Wir wollen annehmen, daß die Vektorfunktionen  $\Psi_j$  den Gleichungen

$$\Delta \Psi_j = -\frac{\omega^2}{q^2} \Psi_j$$

genügen. Wir erhalten dann:

$$J_j \left( 1 - \frac{c^2}{q^2} \right) = -\frac{c^2}{\omega^2} \int \left( \Psi_j \frac{d}{dN_{P'}} - \frac{d\Psi_j}{dN_{P'}} \right) \frac{e^{i\omega \left( t - \frac{R}{c} \right)}}{R} d\sigma_{P'}.$$

Wir berechnen in derselben Weise:

$$\text{rot}_P \text{ rot}_P \sum_1^p \sum_{R > R_0}^{(P')} \frac{\Phi_j \left( t - \frac{R}{c} \right)}{R}.$$

Wir haben:

$$\text{rot}_P \text{rot}_P \left\{ \Psi_j(P) \frac{e^{i\omega \left(t - \frac{R}{c}\right)}}{R} \right\} = \left\{ \left( \frac{\omega^2}{c^2 R} - \frac{\omega i}{c R^2} - \frac{1}{R^3} \right) \Psi_j \right. \\ \left. - \frac{R}{R^3} \left( \frac{\omega^2}{c^2 R} - \frac{3\omega i}{c R^2} - \frac{3}{R^3} \right) (\mathbf{R} \times \Psi_j) \right\} e^{i\omega \left(t - \frac{R}{c}\right)}.$$

Folglich:

$$\int_{R=R_0} \text{rot}_P \text{rot}_P \left\{ \Psi_j(P') \frac{d}{dN_{P'}} \frac{e^{i\omega \left(t - \frac{R}{c}\right)}}{R} \right\} d\sigma_{P'} \\ = \int_{R=R_0} \left\{ \left( \frac{\omega^2}{c^2 R^3} - \frac{2\omega i}{c R^2} - \frac{3}{R^4} \right) \Psi_j \right. \\ \left. - \frac{R}{R^3} \left( \frac{\omega^2}{c^2 R^3} - \frac{6\omega i}{c R^2} - \frac{9}{R^4} \right) (\mathbf{R} \times \Psi_j) \right\} e^{i\omega \left(t - \frac{R}{c}\right)} d\sigma_{P'} \\ + \frac{i\omega}{c} \int_{R=R_0} \text{rot}_P \text{rot}_P \left\{ \Psi_j(P') \frac{e^{i\omega \left(t - \frac{R}{c}\right)}}{R} \right\} d\sigma_{P'}.$$

Die Glieder:

$$\frac{\omega^2}{c^2} \int_{R=R_0} \left\{ \frac{\Psi_j}{R^3} - \frac{R}{R^4} (\mathbf{R} \times \Psi_j) \right\} e^{i\omega \left(t - \frac{R}{c}\right)} d\sigma_{P'}$$

ergeben, wenn  $R_0$  sehr klein ist:

$$\frac{8\pi}{3} \frac{\omega^2}{c^2} \Psi_j(P) e^{i\omega t}$$

und die Glieder:

$$-3 \int_{R=R_0} \left\{ \frac{\Psi_j}{R^4} - \frac{3R}{R^5} (\mathbf{R} \times \Psi_j) \right\} e^{i\omega \left(t - \frac{R}{c}\right)} d\sigma_{P'} \\ - \frac{4\pi}{5} \Delta_P \Psi_j(P) e^{i\omega t} + \frac{12\pi}{5} \text{grad}_P \text{div}_P \Psi_j(P) e^{i\omega t},$$

während die übrigen Glieder einen mit  $R_0$  verschwindenden Beitrag geben.

Wir erhalten in derselben Weise aus:

$$\int_{R=R_0} \text{rot}_P \text{rot}_P \left\{ \frac{d \Psi_j}{d N_{P'}} e^{i \omega \left( t - \frac{R}{c} \right)} \right\} d \sigma_{P'} : \\ \frac{8 \pi}{15} \Delta_P \Psi_j(P) e^{i \omega t} - \frac{8 \pi}{5} \text{grad}_P \text{div}_P \Psi_j(P) e^{i \omega t}.$$

Wir haben also annähernd:

$$\sum_1^P \sum_{R > R_0}^{(j)} \text{rot}_P \text{rot}_P \frac{\Phi_j \left( t - \frac{R}{c} \right)}{R} \\ = \frac{4 \pi c^3 q^3 e^{i \omega t}}{\omega^3 (c^2 - q^2)} \sum_1^P \sum_{(j)} \left\{ \frac{2}{3} \frac{\omega^2}{c^2} \Psi_j + \frac{1}{3} \frac{\omega^2}{q^2} \Psi_j + \text{grad}_P \text{div}_P \Psi_j \right\} \\ + \frac{c^3 q^3}{\omega^3 (c^2 - q^2)} \text{rot}_P \text{rot}_P \int_P \left( \Psi_j \frac{d}{d N_{P'}} - \frac{d \Psi_j}{d N_{P'}} \right) e^{i \omega \left( t - \frac{R}{c} \right)} \frac{1}{R} d \sigma_{P'}.$$

Wir setzen:

$$C_0(P) = - \frac{c^3 q^3}{\omega^3 (c^2 - q^2)} \text{rot}_P \text{rot}_P \sum_1^P \sum_{(j)} \int_P \left( \Psi_j \frac{d}{d N_{P'}} - \frac{d \Psi_j}{d N_{P'}} \right) e^{i \omega \left( t - \frac{R}{c} \right)} \frac{1}{R} d \sigma_{P'}.$$

Wenn wir annehmen, daß die innerhalb der Kugel  $R = R_0$  gelegenen Resonatoren keine Einwirkung auf  $P$  ausüben, so folgt:

$$(-L_j \omega^3 + M_j i \omega + K_j) \frac{\Psi_j}{N_j} \\ = \frac{4 \pi c^3 q^3}{\omega^3 (c^2 - q^2)} \sum_1^P \sum_{(j)} \left\{ \frac{2}{3} \frac{\omega^2}{c^2} \Psi_j + \frac{1}{3} \frac{\omega^2}{q^2} \Psi_j + \text{grad}_P \text{div}_P \Psi_j \right\}.$$

Folglich:

$$\sum_1^P \sum_{(j)} \text{div}_P \Psi_j = - \frac{8 \pi}{3} \sum_1^P \sum_{(j)} \frac{N_j}{-L_j \omega^3 + M_j i \omega + K_j} \cdot \sum_1^P \sum_{(j)} \text{div}_P \Psi_j.$$

Also entweder:

$$\sum_1^P \sum_{(j)} \text{div}_P \Psi_j = 0$$

oder:

$$(4) \quad 1 + \frac{8 \pi}{3} \sum_{(j)} \frac{N_j}{-L_j \omega^3 + M_j i \omega + K_j} = 0.$$

Im ersten Falle erhalten wir:

$$\sum_1^p \psi_j = \frac{2q^2 + c^2}{c^2 - q^2} \sum_1^p \frac{\frac{4\pi}{3} N_j}{-L_j \omega^2 + M_j i \omega + K_j} \psi_j$$

und folglich, wenn wir:

$$\sum_1^p \frac{\frac{4\pi}{3} N_j}{-L_j \omega^2 + M_j i \omega + K_j} = Q$$

setzen:

$$1 = \frac{2q^2 + c^2}{c^2 - q^2} Q$$

oder:

$$\frac{c^2}{q^2} = \frac{1 + 2Q}{1 - Q},$$

was mit der Lorentzschen Theorie übereinstimmt.

Im zweiten Falle haben wir:

$$\text{grad}_P \text{div}_P \psi_j = -\frac{\omega^2}{q^2} \psi_j$$

und:

$$\Delta_P \psi_j = -\frac{\omega^2}{q^2} \psi_j.$$

Wir setzen:

$$\text{div} \psi_j = -\frac{\omega^2}{q^2} \chi_j$$

und haben dann:

$$\psi_j = \text{grad} \chi_j.$$

Die skalare Funktion  $\chi_j$  muß der Gleichung:

$$\Delta \chi_j = -\frac{\omega^2}{q^2} \chi_j$$

genügen. Die Größe  $q$  ist unbestimmt. Unsere Lösung entspricht einer longitudinalen Welle mit bestimmter Frequenz, aber einer beliebigen Wellenlänge.

Man sieht leicht, daß man, wenn die Bedingung (4) erfüllt ist, den Gleichungen (1) und (2) durch den Ansatz:

$$\phi_j = \text{grad} \chi_j$$

genügen kann, wo  $\chi_j$  eine beliebige, in physikalisch kleinen Räumen schwach variierende, skalare Funktion ist.

Die Resultate, zu denen wir hier gelangt sind, stehen nicht im Widerspruch mit der Lorentzschen Theorie. Nach

dieser ist die Dielektrizitätskonstante  $\epsilon$  eine Funktion von  $\omega$ . Wenn wir  $\omega$  einen solchen Wert geben, daß  $\epsilon$  verschwindet, so können wir die Maxwell-Lorentz'schen Gleichungen durch den Ansatz:

$$\mathbf{E} = \text{grad } \chi, \quad \mathbf{H} = 0,$$

wo  $\chi$  eine beliebige skalare Funktion ist, befriedigen. Aber meines Wissens hat man bisher nicht bemerkt, daß es eine notwendige Folge der Lorentz'schen Theorie ist, daß in einem Dielektrikum longitudinale Wellen mit willkürlicher Wellenlänge, aber bestimmter Frequenz existieren können.

Beim Na-Dampf bei  $644^\circ \text{C}$  kann man nach den Messungen von Wood der Bedingung (4) annähernd durch einen reellen Wert von  $\omega$  genügen.<sup>1)</sup>

3. *Über die Drehung der Polarisationssebene in gewissen Kristallen.* — Eine Drehung der Polarisationssebene kann, der Kristallsymmetrie nach, in 15 Kristallklassen vorkommen.<sup>2)</sup> Man sieht in der Tat leicht, daß man die schraubenförmige Anordnung der Moleküle, von welcher die Drehung nach Pasteur, Rammelsberger u. a. bedingt ist, in den verschiedensten Weisen dadurch erhalten kann, daß man Bravais'sche Gitter ineinander stellt. Wir beschränken uns hier auf einen speziellen Fall. Die übrigen Fälle kann man in ähnlicher Weise behandeln. Wir nehmen an, daß man alle Moleküle in dem Molekelhaufen, aus welchem der Kristall besteht, aus einer endlichen Zahl,  $p$ , von ihnen durch Anwendung von drei Operationen, nämlich zwei Translationen und der Schraubendrehung:

$$x' = x \cos \vartheta - y \sin \vartheta, \quad y' = x \sin \vartheta + y \cos \vartheta, \quad z' = z + h$$

ableiten kann und daß diese Operationen den Molekelhaufen in sich überführen.  $\vartheta$  soll hier den Wert  $2\pi/p'$  haben, wo  $p'$  eine ganze Zahl ist. Die Lage einer Molekel können wir dann durch vier ganzzahlige Indizes  $j, k, l, m$  angeben. Die erste bestimmt die Art der Molekel und kann die Werte 0, 1,  $p-1$  annehmen.  $l$  und  $m$  ( $-\infty < l, m < \infty$ ) bestimmen eine Schraubendrehungsachse, die durch eine Translation aus der  $z$ -Achse hervorgegangen ist.  $k$  ( $-\infty < k < \infty$ ) bestimmt

1) D. A. Goldhammer, l. c. Fig. 15. p. 58.

2) F. Pockels, Lehrbuch der Kristalloptik. Leipzig, Teubner 1906. p. 315ff.



die Lage der Molekel in bezug auf diese Schraubendrehungsachse. Jedes Molekül soll einen Resonator tragen. Die Koeffizienten der Schwingungsgleichung derselben sollen nur von  $j$  abhängen. Sie hat also die Form:

$$L_j \frac{d^2 \Phi_{(l,m)}^{(j,k)}}{dt^2} + M_j \frac{d \Phi_{(l,m)}^{(j,k)}}{dt} + K_j \Phi_{(l,m)}^{(j,k)} = C_s.$$

Wir wollen die Fortpflanzung einer ebenen Welle entlang der  $z$ -Achse untersuchen. Wir nehmen an, daß die Wellenlänge so groß ist, daß man eine Länge  $R_0$  finden kann, die klein neben der Wellenlänge, aber groß neben dem Abstände zwischen zwei angrenzenden Resonatoren derselben Art sind. Die Schwingungsgleichung eines Resonators  $\bar{P}(\bar{j}, \bar{k}, \bar{l}, \bar{m})$  ist:

$$L_{\bar{j}} \frac{d^2 \Phi_{(\bar{l}, \bar{m})}^{(\bar{j}, \bar{k})}}{dt^2} + M_{\bar{j}} \frac{d \Phi_{(\bar{l}, \bar{m})}^{(\bar{j}, \bar{k})}}{dt} + K_{\bar{j}} \Phi_{(\bar{l}, \bar{m})}^{(\bar{j}, \bar{k})} = C_0(\bar{P}) \\ + \text{rot } \bar{P} \text{ rot } \bar{P} \sum_j^{0 \dots p-1} \sum_{k,l,m}^{-\infty \dots +\infty} \frac{\Phi_{(l,m)}^{(j,k)} \left( t - \frac{R}{c} \right)}{R} \\ R = \bar{P} \rightarrow P, \quad P = (j, k, l, m).$$

Durch eine Kugel  $R = R_0$  und eine von  $\bar{P}$  unabhängige, aber  $\bar{P}$  umschließende geschlossene Fläche,  $F$ , deren Abmessungen groß neben  $R_0$  sind, zerlegen wir das zweite Glied rechts in drei Summen. Diejenige Summe, die sich auf den Zwischenraum,  $\Omega$ , zwischen der Kugel  $R = R_0$  und der Fläche  $F$  bezieht, können wir in derselben Weise wie oben in ein Raumintegral und dann in eine Summe von Flächenintegralen umformen. Wir setzen:

$$\Phi_{(l,m)}^{(j,k)} = \frac{\Psi^{(j,j')}}{N_j} e^{i\omega \left( t - \frac{z}{c} P \right)},$$

wo:

$$0 \leq j' \leq p' - 1, \quad k = j' + k' p'$$

und wo die  $pp'$ -Vektoren  $\Psi^{(j,j')}$  nur von den ganzen Zahlen  $j$  und  $j'$  abhängen sollen. Wir haben dann:

$$\begin{aligned}
& \sum_j^{0 \dots p-1} \sum_{\substack{k, l, m \\ \Omega}}^{-\infty \dots +\infty} \text{rot}_{\bar{P}} \text{rot}_{\bar{P}} \frac{\Phi_{(l, m)}^{(j, k)} \left( t - \frac{R}{c} \right)}{R} \\
&= \sum_j^{0 \dots p-1} \sum_{j'}^{0 \dots p'-1} \int_{\Omega} \text{rot}_{\bar{P}} \text{rot}_{\bar{P}} \left\{ \Psi^{(j, j')} e^{\frac{i \omega \left( t - \frac{R}{c} - \frac{z}{q} P \right)}{R}} \right\} d\omega_P \\
&= \frac{c^2 q^2}{\omega^2 (c^2 - q^2)} \text{rot}_{\bar{P}} \text{rot}_{\bar{P}} \sum_j^{0 \dots p-1} \sum_{j'}^{0 \dots p'-1} \Psi^{(j, j')} \int_{\bar{F}} e^{-\frac{i \omega z}{q} P} \\
&\quad \left( \frac{d}{dN_P} + \frac{i \omega}{q} \frac{dz}{dN_P} P \right) e^{\frac{i \omega \left( t - \frac{R}{c} \right)}{R}} d\sigma_P \\
&+ \frac{c^2 q^2}{\omega^2 (c^2 - q^2)} \sum_j^{0 \dots p-1} \sum_{j' \atop R=R_0}^{0 \dots p'-1} \int \text{rot}_{\bar{P}} \text{rot}_{\bar{P}} \left\{ \Psi^{(j, j')} e^{-\frac{i \omega z}{q} P} \right. \\
&\quad \left. \left( \frac{d}{dN_P} + \frac{i \omega}{q} \frac{dz}{dN_P} P \right) e^{\frac{i \omega \left( t - \frac{R}{c} \right)}{R}} \right\} d\sigma_P.
\end{aligned}$$

$\Omega'$  sei derjenige Teil des Kristalles, der außerhalb von  $F$  liegt. Wir setzen:

$$\begin{aligned}
C_0(\bar{P}) &= - \text{rot}_{\bar{P}} \text{rot}_{\bar{P}} \sum_j^{0 \dots p-1} \sum_{\substack{k, l, m \\ \Omega'}}^{-\infty \dots +\infty} \frac{\Phi_{(l, m)}^{(j, k)} \left( t - \frac{R}{c} \right)}{R} - \\
&- \frac{c^2 q^2}{\omega^2 (c^2 - q^2)} \text{rot}_{\bar{P}} \text{rot}_{\bar{P}} \sum_j^{0 \dots p-1} \sum_{j'}^{0 \dots p'-1} \Psi^{(j, j')} \int_{\bar{F}} e^{-\frac{i \omega z}{q} P} \\
&\quad \left( \frac{d}{dN_P} + \frac{i \omega}{q} \frac{dz}{dN_P} P \right) e^{\frac{i \omega \left( t - \frac{R}{c} \right)}{R}} d\sigma_P.
\end{aligned}$$

Wir haben oben gesehen, daß annähernd:

$$\begin{aligned}
& \int_{R=R_0} \text{rot}_{\bar{P}} \text{rot}_{\bar{P}} \left\{ \Psi^{(j, j')} e^{-\frac{i \omega z}{q} P} \left( \frac{d}{dN_P} + \frac{i \omega}{q} \frac{dz}{dN_P} P \right) e^{\frac{i \omega \left( t - \frac{R}{c} \right)}{R}} \right\} d\sigma_P \\
&= \frac{4\pi}{3} \frac{\omega^2 (2q^2 + c^2)}{c^2 - q^2} \Psi^{(j, j')} e^{\frac{i \omega \left( t - \frac{z}{q} \bar{P} \right)}{R}} + \\
&+ 4\pi \text{grad}_{\bar{P}} \text{div}_{\bar{P}} \left\{ \Psi^{(j, j')} e^{\frac{i \omega \left( t - \frac{z}{q} \bar{P} \right)}{R}} \right\}.
\end{aligned}$$

Wenn wir uns mit derselben Annäherung wie im zweiten Paragraphen begnügen, so erhalten wir folglich:

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & \frac{1}{N_j} (-L_j \omega^2 + M_j i \omega + K_j) \psi^{(j, j')} \\
 & = e^{-i \omega \left(t - \frac{z}{q} \bar{P}\right)} \text{rot}_{\bar{P}} \text{rot}_{\bar{P}} \sum_j^{0 \dots p-1} \sum_{\substack{k, l, m \\ R < R_0}}^{-\infty \dots + \infty} \frac{\Phi_{(l, m)}^{(j, k)} \left(t - \frac{R}{c}\right)}{R} + \\
 & + \frac{4\pi}{3} \frac{2q^2 + c^2}{c^2 - q^2} \sum_j^{0 \dots p-1} \sum_{j'}^{0 \dots p'-1} \psi^{(j, j')} + \\
 & + \frac{4\pi c^2 q^2}{\omega^2 (c^2 - q^2)} e^{\frac{i \omega z}{q} \bar{P}} \text{grad}_{\bar{P}} \text{div}_{\bar{P}} \sum_j^{0 \dots p-1} \sum_{j'}^{0 \dots p'-1} \left\{ \psi^{(j, j')} e^{-\frac{i \omega z}{q} \bar{P}} \right\}, \\
 (2) \quad & \left\{ \begin{aligned} \Phi_{(l, m)}^{(j, k)} &= \frac{1}{N_j} \psi^{(j, j')} e^{i \omega \left(t - \frac{z}{q} \bar{P}\right)}, \\ k &= j' + k' p'. \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

Bevor wir weiter gehen, müssen wir uns darüber klar machen, wie unser Ergebnis modifiziert wird, wenn wir die Annäherung weiter treiben. Wir haben dabei zwei Umstände zu beachten. Wir haben eine Summe durch ein Integral ersetzt. Dies ist nicht genau, sondern nur annäherungsweise richtig. Wir haben ferner ein über die Kugel  $R = R_0$  erstrecktes Integral durch den angenäherten Wert desselben ersetzt. Wir müssen also untersuchen, wie die obigen Gleichungen modifiziert werden, wenn wir in diesen beiden Beziehungen die Annäherung weiter treiben. Es ist ohne weiteres klar, daß wir auf diese Weise, und zwar nicht nur in dem hier behandelten Falle, sondern ganz allgemein, Zusatzglieder in dem Ausdrucke für  $q$  erhalten werden. In der Theorie der Dispersion des Lichtes vernachlässigt man diese kleinen Glieder. Dies ist auch hier erlaubt, wenn wir zeigen können, daß sie an sich keine Drehung der Polarisationssebene, sondern nur eine kleine Verbesserung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit oder eine kleine Doppelbrechung ergeben. Man sieht leicht, daß dies in bezug auf den zuletzt erwähnten Umstand tatsächlich zutrifft. Die Glieder, die wir aus den über die Kugel  $R = R_0$  erstreckten Integralen bekommen haben, enthalten  $\psi^{(j, j')}$  nur in der Verbindung:

$$\sum_j^{0 \dots p-1} \sum_{j'}^{0 \dots p'-1} \psi^{(j, j')}.$$

Das gilt auch von den Gliedern, die wir erhalten würden, wenn wir die Annäherung weiter treiben wollten. Diese Glieder enthalten also keine Spur mehr von der schraubenförmigen Anordnung der Molekeln im Raume und können folglich eine Drehung der Polarisationssebene nicht erklären. Dagegen müssen wir den zuerst erwähnten Punkt näher untersuchen. Wir wollen dabei Glieder von der Größenordnung:

$$\left(\frac{d}{R_0}\right)^2$$

(wo  $d$  die Entfernung zwischen zwei angrenzenden Resonatoren derselben Art ist) noch berücksichtigen, aber kleinere Glieder vernachlässigen.

Wir betrachten diejenigen Molekeln ( $j, k, l, m$ ), denen bestimmte Werte von  $j$  und  $j'$  entsprechen, während  $k', l, m$  alle positiven und negativen, ganzzahligen Werte annehmen können, die mit der Bedingung verträglich sind, daß das Molekül außerhalb der Kugel  $R = R_0$  und innerhalb der Fläche  $F$  liegen soll. Alle diese Moleküle gehören einem Bravais'schen Gitter. Jedem Punkte dieses Gitters kann man einen parallelepipedischen Elementarbereich zuordnen, in dessen Schwerpunkt das Molekül gelegen ist und der übrigens so gewählt wird, daß sie den Raum lückenlos ausfüllen. Die demselben  $j$ -Werte entsprechenden Elementarbereiche  $\omega_{(k, l, m)}^{(j, j')}$  sind kongruent.  $\omega^{(j)}$  sei das Volumen dieses Bereiches und also:  $N_j \omega^{(j)} = 1$ . — Wir betrachten jetzt den Ausdruck:

$$J_{(k', l, m)}^{(j, j')} = \omega_{(k', l, m)}^{(j, j')} \int \frac{e^{i\omega\left(t - \frac{R}{c} - \frac{z}{q} p'\right)}}{R} d\omega_{p'}.$$

Wir setzen der Kürze wegen:

$$\frac{e^{i\omega\left(t - \frac{R}{c} - \frac{z}{q} p'\right)}}{R} = \Pi(x', y', z'; t; \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}),$$

indem wir ein rechtwinkliges, Cartesisches Bezugssystem einführen. Wir haben dann in leichtverständlicher Bezeichnung:

$$\Pi(x', y', z'; t; \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \Pi(P; t; \bar{P}) + \sum (x' - x_P) \left( \frac{\partial \Pi}{\partial x'} \right)_P + \\ + \frac{1}{2} \sum (x' - x_P)^2 \left( \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x'^2} \right)_P + \dots$$

Wegen der Symmetrie des Elementarbereiches in bezug auf den Schwerpunkt erhalten wir hieraus:

$$J_{(k', l, m)}^{(j, j')} = \psi^{(j, j')} \left\{ \Pi(P; t; \bar{P}) \omega^{(j)} + \sum \alpha_{11}^{(j, j')} \left( \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x'^2} \right)_P + \right. \\ \left. + \sum \alpha_{1111}^{(j, j')} \left( \frac{\partial^4 \Pi}{\partial x'^4} \right)_P + \dots \right\}.$$

Hier ist:

$$\alpha_{11}^{(j, j')} = \frac{1}{2} \int_{\omega^{(j, j')}} (x' - x_P)^2 d\omega$$

usw. Wir bekommen also:

$$\sum_{\substack{k', l, m \\ \Omega}} \frac{\Phi_{(l, m)}^{(j, k)} \left( t - \frac{R}{c} \right)}{R} = \psi^{(j, j')} \int_{\sum_{\substack{k', l, m \\ \omega^{(j, j')}}} \frac{e^{i\omega \left( t - \frac{R}{c} - \frac{z}{q} \right)}}{R} d\omega - \\ - \psi^{(j, j')} \sum_{\substack{k', l, m \\ \Omega}} \sum \alpha_{11}^{(j, j')} \frac{\partial^2}{\partial x'^2} \frac{e^{i\omega \left( t - \frac{R}{c} - \frac{z}{q} \right)}}{R} + \dots$$

oder annähernd:

$$\psi^{(j, j')} \int_{\Omega} \frac{e^{i\omega \left( t - \frac{R}{c} - \frac{z}{q} \right)}}{R} d\omega - \\ - \psi^{(j, j')} \sum \alpha_{11}^{(j, j')} N_j \int_{\Omega} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{e^{i\omega \left( t - \frac{R}{c} - \frac{z}{q} \right)}}{R} d\omega.$$

Wir berechnen in derselben Weise:

$$\text{rot } \bar{P} \text{ rot } \bar{P} \sum_{\substack{j, k, l, m \\ \Omega}} \frac{\Phi_{(l, m)}^{(j, k)} \left( t - \frac{R}{c} \right)}{R}.$$

Wir erhalten:

$$\sum_{j,j'} \int_{\Omega} \text{rot}_{\bar{P}} \text{rot}_{\bar{P}} \left\{ \psi^{(j,j')} e^{\frac{i\omega(t - \frac{R}{c} - \frac{z}{q})}{R}} \right\} d\omega \\ - \sum_{j,j'} \sum \alpha_{11}^{(j,j')} N_j \int_{\Omega} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \text{rot}_{\bar{P}} \text{rot}_{\bar{P}} \left\{ \psi^{(j,j')} e^{\frac{i\omega(t - \frac{R}{c} - \frac{z}{q})}{R}} \right\} d\omega.$$

Das erste Integral haben wir schon im zweiten Paragraphen berechnet. Das zweite Glied können wir unmittelbar in eine Summe von Flächenintegralen umformen, die sich über die Kugel  $R = R_0$  und die Fläche  $F$  erstrecken. Uns interessieren nur die ersten Integrale. Wir haben:

$$\text{rot}_{\bar{P}} \text{rot}_{\bar{P}} \left\{ \psi^{(j,j')} e^{\frac{i\omega(t - \frac{R}{c} - \frac{z}{q})}{R}} \right\} \\ = \frac{\omega^2}{c^2} \psi^{(j,j')} e^{\frac{i\omega(t - \frac{R}{c} - \frac{z}{q})}{R}} \\ + \text{grad}_{\bar{P}} \text{div}_{\bar{P}} \left\{ \psi^{(j,j')} e^{\frac{i\omega(t - \frac{R}{c} - \frac{z}{q})}{R}} \right\}.$$

Wir erhalten demnach eine erste Summe von Gliedern:

$$\frac{\omega^2}{c^2} \sum_{j,j'} N_j \psi^{(j,j')} \sum_{R=R_0} \int \alpha_{11}^{(j,j')} \cos^2(Nx) \frac{\partial}{\partial R} \left( e^{\frac{i\omega(t - \frac{R}{c} - \frac{z}{q})}{R}} \right) d\sigma,$$

$N$  ist hier die nach innen gezogene Normale der Kugel  $R = R_0$ . — Wenn wir uns mit der oben angegebenen Annäherung begnügen wollen, so können wir auf der Kugel  $R = R_0$ :

$$e^{\frac{i\omega(t - \frac{R}{c} - \frac{z}{q})}{R}} = e^{\frac{i\omega(t - \frac{R_0}{c} - \frac{z}{q})}{R_0}}$$

setzen. Wir bekommen so:

$$-\frac{4\pi\omega^2}{3c^2} e^{\frac{i\omega(t - \frac{R_0}{c} - \frac{z}{q})}{R_0}} \sum_{j,j'} N_j \psi^{(j,j')} (\alpha_{11}^{(j,j')} + \alpha_{22}^{(j,j')} + \alpha_{33}^{(j,j')}).$$

Wir haben ferner:

$$\text{grad}_{\bar{P}} \text{div}_{\bar{P}} \left\{ \psi^{(j,j')} e^{\frac{i\omega(t - \frac{R}{c} - \frac{z}{q})}{R}} \right\} \\ = \psi^{(j,j')} \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} e^{\frac{i\omega(t - \frac{R}{c} - \frac{z}{q})}{R}} + \\ + \frac{R}{R} (\psi^{(j,j')} \times R) \frac{\partial}{\partial R} \left[ \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} e^{\frac{i\omega(t - \frac{R}{c} - \frac{z}{q})}{R}} \right].$$

Wir erhalten folglich eine neue Summe von Gliedern:

$$\sum_{j,j'} N_j \Psi^{(j,j')} \sum_{R=R_0} \int \alpha_{11}^{(j,j')} \cos^2 N x \frac{\partial}{\partial R} \left[ \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} e^{\frac{i\omega}{c} \left( t - \frac{R}{c} - \frac{z}{q} \right)} \right] d\sigma,$$

oder annähernd:

$$\frac{4\pi}{R_0^3} e^{\frac{i\omega}{c} \left( t - \frac{z}{q} \right)} \sum_{j,j'} N_j \Psi^{(j,j')} (\alpha_{11}^{(j,j')} + \alpha_{22}^{(j,j')} + \alpha_{33}^{(j,j')}).$$

Die letzten Glieder ergeben schließlich mit derselben Annäherung:

$$\frac{8\pi}{R_0^3} e^{\frac{i\omega}{c} \left( t - \frac{z}{q} \right)} \sum_{j,j'} N_j \Psi^{(j,j')} (\alpha_{11}^{(j,j')} + \alpha_{22}^{(j,j')} + \alpha_{33}^{(j,j')}).$$

Man sieht sofort, daß die erhaltenen Glieder an sich keine Drehung der Polarisationssebene ergeben. Wir können sie deshalb vernachlässigen. Die Drehung der Polarisationssebene in Kristallen wird, sofern es sich um die hier angestrebte Annäherung handelt, ausschließlich von der Wechselwirkung zwischen Molekülen bedingt, deren Entfernung klein neben der Wellenlänge ist.

Wir kehren zu den Formeln (1) und (2) zurück. Wir können sie in der folgenden Gleichung zusammenfassen:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{N_j} (-L_j \omega^2 + M_j i\omega + K_j) \Psi^{(j,j')} \\ &= \sum_{j,j'} \frac{1}{N_j} \sum_{\substack{k', l, m \\ R < R_0}} \left\{ - \left( \frac{1}{R^3} + \frac{i\omega}{c R^2} - \frac{\omega^2}{c^2 R} \right) \Psi^{(j,j')} + \right. \\ &+ \left( \frac{3}{R^3} + \frac{3i\omega}{c^2 R} - \frac{\omega^2}{c R^2} \right) \frac{\mathbf{R}}{R^2} (\mathbf{R} \times \Psi^{(j,j')}) \left\} e^{-\frac{i\omega R}{c} - \frac{i\omega}{q} \left( t_P - \frac{z_P}{q} \right)} + \\ &+ \frac{4\pi}{3} \frac{2q^2 + c^2}{c^3 - q^3} \sum_{j,j'} \Psi^{(j,j')} + \\ &+ \frac{4\pi c^2 q^2}{\omega^2 (c^3 - q^3)} e^{\frac{i\omega}{q} \left( t - \frac{z}{q} \right)} \text{grad}_P \text{div}_P \sum_{j,j'} \left( \Psi^{(j,j')} e^{-\frac{i\omega z}{q}} \right). \end{aligned}$$

Den Molekelhaufen, woraus der Kristall nach unseren Annahmen besteht, können wir aus  $pp'$  Molekeln durch widerholte Anwendung von drei Translationen herleiten, von denen

eine mit der  $z$ -Achse parallel ist und den Betrag  $p'h$  besitzt. Diese  $pp'$  Molekeln können wir mit dem Vorbehalt beliebig wählen, daß je  $p'$  Molekeln von derselben Art sein müssen und daß keine in bezug auf die oben erwähnten Translationen miteinander äquivalent sind. Wir betrachten  $pp'$  Molekeln dieser Art, die wir so wählen wollen, daß sie der Schraubendrehungsachse  $\bar{l}$ ,  $\bar{m}$  und einander möglichst nahe liegen. Von diesen Molekeln sei  $\bar{j}$ ,  $\bar{k}$ ,  $\bar{l}$ ,  $\bar{m}$  eins. Jeder dieser  $pp'$  Molekeln können wir einen Vektor  $\Psi^{(G,j')}$  zuordnen. Wir zerlegen diesen Vektor in drei Komponenten, von denen  $R^{(G,j')}$  geradeaus von der Achse  $\bar{l}$ ,  $\bar{m}$  weist,  $Z^{(G,j')}$  mit dieser Achse parallel ist und endlich  $S^{(G,j')}$  gegen diese beiden senkrecht ist. Wir führen ferner ein rechtwinkliges Bezugssystem ein, dessen  $x$ -Achse durch den Punkt  $\bar{j}$ ,  $\bar{k}$ ,  $\bar{l}$ ,  $\bar{m}$  geht, dessen  $z$ -Achse die Achse  $\bar{l}$ ,  $\bar{m}$  ist und dessen  $y$ -Achse mit  $S^{(G,j')}$  parallel ist. Den Winkel, den der Vektor  $R^{(G,j')}$  mit der  $xz$ -Ebene bildet, können wir dann folgendermaßen schreiben:

$$(\bar{j} - \bar{j}')\vartheta + \vartheta_j - \vartheta_j + 2\pi(k' - k') = \Theta.$$

Wir haben:

$$\left(-\frac{1}{R^3} - \frac{i\omega}{cR^2} + \frac{\omega^2}{c^2R}\right)e^{-\frac{i\omega R}{c}} = -\frac{1}{R^3} + \frac{\omega^2}{2c^2R} - \frac{2i\omega^3}{3c^3} + \dots$$

oder annähernd:

$$= -\frac{1}{R^3},$$

$$\left(\frac{3}{R^3} + \frac{3i\omega}{cR^2} - \frac{\omega^2}{c^2R}\right)e^{-\frac{i\omega R}{c}} = \frac{3}{R^3} + \frac{\omega^2}{2c^2R} + \dots = \frac{3}{R^3}.$$

Zur Bestimmung von  $R^{(G,j')}$ ,  $S^{(G,j')}$  und  $Z^{(G,j')}$  bekommen wir jetzt folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{N_j}(L_j\omega^2 + M_ji\omega + K_j)R^{(G,j')} \\ &= -\sum_{j,j'} \frac{1}{N_j} \sum_{\substack{k',l,m \\ R > R_0}} \frac{1}{R^3} (R^{(G,j')} \cos \Theta - S^{(G,j')} \sin \Theta) e^{-\frac{i\omega R}{c}} + \\ &+ \sum_{j,j'} \frac{3}{N_j} \sum_{\substack{k',l,m \\ R < R_0}} \frac{x_P - x_{\bar{P}}}{R^3} \{[(x_P - x_{\bar{P}}) \cos \Theta + y_P \sin \Theta] R^{(G,j')} - \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& - [(x_P - x_{\bar{P}}) \sin \Theta - y_P \cos \Theta] S(j, j') + z_P Z(j, j') \} e^{-\frac{i \omega z}{q} P} + \\
& + \frac{4\pi}{3} \frac{2q^2 + c^2}{c^2 - q^2} \sum_{j, j'} (R(j, j') \cos \Theta - S(j, j') \sin \Theta), \\
& \frac{1}{N_{\bar{j}}} (-L_{\bar{j}} \omega^2 + M_{\bar{j}} i \omega + K_{\bar{j}}) S(\bar{j}, \bar{j}') \\
& = - \sum_{j, j'} \frac{1}{N_j} \sum_{\substack{k', l, m \\ R < R_0}} \frac{1}{R^3} (R(j, j') \sin \Theta + S(j, j') \cos \Theta) + \\
& + \sum_{j, j'} \frac{3}{N_j} \sum_{\substack{k', l, m \\ R < R_0}} \frac{y_P}{R^5} \{ [(x_P - x_{\bar{P}}) \cos \Theta + y_P \sin \Theta] R(j, j') - \\
& - [(x_P - x_{\bar{P}}) \sin \Theta - y_P \cos \Theta] S(j, j') + z_P Z(j, j') \} e^{-\frac{i \omega z}{q} P} + \\
& + \frac{4\pi}{3} \frac{2q^2 + c^2}{c^2 - q^2} \sum_{j, j'} (R(j, j') \sin \Theta + S(j, j') \cos \Theta), \\
& \frac{1}{N_{\bar{j}}} (-L_{\bar{j}} \omega^2 + M_{\bar{j}} i \omega + K_{\bar{j}}) Z(\bar{j}, \bar{j}') \\
& = - \sum_{j, j'} \frac{Z(j, j')}{N_j} \sum_{\substack{k', l, m \\ R < R_0}} e^{-\frac{i \omega z}{q} P} \frac{1}{R^3} + \\
& + \sum_{j, j'} \frac{3}{N_j} \sum_{\substack{k', l, m \\ R < R_0}} \frac{x_P}{R^5} \{ [(x_P - x_{\bar{P}}) \cos \Theta + y_P \sin \Theta] R(j, j') - \\
& - [(x_P - x_{\bar{P}}) \sin \Theta - y_P \cos \Theta] S(j, j') + z_P Z(j, j') \} e^{-\frac{i \omega z}{q} P} + \\
& + \frac{4\pi}{3} \frac{2q^2 + c^2}{c^2 - q^2} \sum_{j, j'} Z(j, j') - \frac{4\pi c^2}{c^2 - q^2} \sum_{j, j'} Z(j, j').
\end{aligned}$$

Nach unseren Annahmen über die Konstitution des Kristalles hängen die Koeffizienten in diesen Gleichungen von  $j, \bar{j}$  und  $j' - \bar{j}'$  ab. — Wir versuchen unsere Gleichungen durch den Ansatz:

$$R(j, j') = N_j R(j) e^{i n (j' \phi + \phi \bar{j})},$$

$$S(j, j') = N_j S(j) e^{i n (j' \phi + \phi \bar{j})},$$

$$Z(j, j') = N_j Z(j) e^{i n (j' \phi + \phi \bar{j})}$$

zu befriedigen, wo  $n$  eine positive oder negative ganze Zahl ist, deren absoluter Betrag höchstens  $= p'/2$  ist. Wir berechnen zunächst die Summen:

$$\begin{aligned} & \sum_j^{0..p-1} \sum_{j'}^{0..p'-1} (R^{(j,j')} \cos \Theta - S^{(j,j')} \sin \Theta), \\ & \sum_j^{0..p-1} \sum_{j'}^{0..p'-1} (R^{(j,j')} \sin \Theta + S^{(j,j')} \cos \Theta), \\ & \sum_j^{0..p-1} \sum_{j'}^{0..p'-1} Z^{(j,j')}. \end{aligned}$$

Die erste Summe hat den Wert:

$$\frac{p'}{2} \sum_j^{0..p-1} N_j (R^{(j)} \mp i S^{(j)}) e^{\pm i(\bar{U}\phi + \phi\bar{j})},$$

wenn  $n = \pm 1$ , sonst den Wert Null. Die zweite Summe hat ebenfalls den Wert Null, wenn nicht  $n = \pm 1$  und in diesem Falle den Wert:

$$\pm \frac{ip'}{2} \sum_j^{0..p-1} N_j (R^{(j)} \mp i S^{(j)}) e^{\pm i(\bar{U}\phi + \phi\bar{j})}.$$

Die dritte Summe hat stets den Wert Null. — Diese drei Summen sind die Komponenten in drei gegeneinander senkrechten Richtungen von der resultierenden Polarisation. Von dem Falle, wo diese Komponenten und somit auch die Polarisation selbst verschwinden, können wir absehen. Wir nehmen also an, daß  $n = \pm 1$ . In diesen beiden Fällen ist die durch unseren Ansatz definierte Welle zirkular polarisiert. Wir setzen der Kürze wegen:

$$-L_j \omega^2 + M_j i \omega + K_j = H_j$$

und können unsere Gleichungen dann folgendermaßen schreiben:

$$\left[ \begin{aligned} H_j R^{(j)} &= \sum_j^{0..p-1} (a_{\pm}^{(1,1)}(\bar{j}, j) R^{(j)} + a_{\pm}^{(1,2)} S^{(j)} + a_{\pm}^{(1,3)} Z^{(j)}) \\ &+ \frac{2\pi p'}{3} \frac{2q^2 + c^2}{c^2 - q^2} \sum_j^{0..p-1} N_j (R^{(j)} \mp i S^{(j)}), \end{aligned} \right.$$

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} H_j S^{(j)} &= \sum_j^{0..p-1} (a_{\pm}^{(2,1)}(\bar{j}, j) R^{(j)} + a_{\pm}^{(2,2)} S^{(j)} + a_{\pm}^{(2,3)} Z^{(j)}) \\ &\quad \pm \frac{2\pi p}{3} \frac{i 2q^2 + c^2}{c^2 - q^2} \sum_j^{0..p-1} N_j (R^{(j)} \mp i S^{(j)}), \\ H_j Z^{(j)} &= \sum_j^{0..p-1} (a_{\pm}^{(3,1)}(\bar{j}, j) R^{(j)} + a_{\pm}^{(3,2)} S^{(j)} + a_{\pm}^{(3,3)} Z^{(j)}). \end{aligned} \right.$$

Hier ist:

$$a_{\pm}^{(1,1)} = - \sum_{\substack{k, l, m \\ R < R_0}} \frac{1}{R^3} \left\{ \cos \Theta - \frac{3(x_P - x_P)}{R^2} \right. \\ \left. [(x_P - x_P) \cos \Theta + y_P \sin \Theta] \right\} e^{\pm i \Theta - \frac{i \omega z}{q} P},$$

$$a_{\pm}^{(1,2)} = \sum_{\substack{k, l, m \\ R < R_0}} \frac{1}{R^3} \left\{ \sin \Theta - \frac{3(x_P - x_P)}{R^2} \right. \\ \left. [(x_P - x_P) \sin \Theta - y_P \cos \Theta] \right\} e^{\pm i \Theta - \frac{i \omega z}{q} P}$$

usw.

Die Gleichungen (3) geben zu folgenden allgemeinen Bemerkungen Anlaß. Durch Elimination der Summe:

$$\sum_j^{0..p-1} N_j (R^{(j)} \mp i S^{(j)})$$

kann man sie in eine solche Form bringen, daß diese Summe und somit auch die Größe:

$$\frac{2q^2 + c^2}{c^2 - q^2}$$

nur in einer Gleichung vorkommt, während die übrigen Gleichungen  $q$  nur in dem Faktor:

$$e^{-\frac{i \omega z}{q} P}$$

in  $a_{\pm}^{(i,k)}$  enthalten. Nun ist  $\frac{\omega z_P}{q}$  für alle Punkte innerhalb der Kugel  $R = R_0$  eine kleine Größe. In erster Näherung können wir also:

$$e^{-\frac{i \omega z}{q} P} = 1$$

setzen. Wir sehen dann, daß unsere Gleichungen uns zwei Werte für  $q$  geben, die den Indizes  $\pm$  in den Koeffizienten

entsprechen. Die beiden zirkular polarisierten Wellen, die sich parallel der  $z$ -Achse fortpflanzen können, haben also im allgemeinen verschiedene Geschwindigkeiten. Eine Drehung der Polarisationssebene findet also statt.

Am einfachsten gestaltet sich selbstverständlich die Theorie, wenn der Kristall nur eine einzige Art von Resonatoren besitzt, d. h. wenn  $p = 1$ . Die Gleichungen (3) reduzieren sich dann auf ein System von drei Gleichungen mit drei Unbekannten  $R, S, Z$ . Die Elimination von diesen Unbekannten ergibt eine Gleichung, die wir leicht auf die Form:

$$(4) \quad \begin{vmatrix} H - A_{\pm}^{(1,1)} - Q, & -A_{\pm}^{(1,2)}, & -A_{\pm}^{(1,3)} \\ -A_{\pm}^{(2,1)}, & H - A_{\pm}^{(2,2)}, & -A_{\pm}^{(2,3)} \\ -A_{\pm}^{(3,1)}, & -A_{\pm}^{(3,2)}, & H - A_{\pm}^{(3,3)} \end{vmatrix} = 0$$

bringen. Hier ist:

$$Q = \frac{4\pi}{3} \frac{2q^2 + c^2}{c^2 - q^2},$$

$$A_{\pm}^{(1,1)} = \frac{1}{2} (a_{\pm}^{(1,1)} + a_{\pm}^{(2,2)}) \pm \frac{i}{2} (a_{\pm}^{(1,2)} - a_{\pm}^{(2,1)}),$$

$$A_{\pm}^{(1,2)} = \frac{1}{2} (a_{\pm}^{(1,1)} - a_{\pm}^{(2,2)}) \mp \frac{i}{2} (a_{\pm}^{(1,2)} + a_{\pm}^{(2,1)}),$$

$$A_{\pm}^{(2,1)} = \frac{1}{2} (a_{\pm}^{(1,1)} - a_{\pm}^{(2,2)}) \pm \frac{i}{2} (a_{\pm}^{(1,2)} + a_{\pm}^{(2,1)}),$$

$$A_{\pm}^{(2,2)} = \frac{1}{2} (a_{\pm}^{(1,1)} + a_{\pm}^{(2,2)}) \mp \frac{i}{2} (a_{\pm}^{(1,2)} - a_{\pm}^{(2,1)}),$$

$$A_{\pm}^{(1,3)} = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_{\pm}^{(1,3)} \mp i a_{\pm}^{(2,3)}), \quad A_{\pm}^{(3,1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_{\pm}^{(3,1)} \pm i a_{\pm}^{(3,2)}),$$

$$A_{\pm}^{(2,3)} = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_{\pm}^{(1,3)} \pm i a_{\pm}^{(2,3)}), \quad A_{\pm}^{(3,2)} = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_{\pm}^{(3,1)} \mp i a_{\pm}^{(3,2)}),$$

$$A_{\pm}^{(3,3)} = a_{\pm}^{(3,3)}.$$

Man findet:

$$A_{\pm}^{(11)} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{k, l, m \\ R < R_0}} \frac{1}{R^3} \left( 1 - \frac{3x_F^2}{R^2} \right) e^{-\frac{i\omega z}{q} p},$$

$$A_{\pm}^{(12)} = \frac{3}{2} \sum_{\substack{k, l, m \\ R < R_0}} \frac{1}{R^5} [(x_P - x_F)^2 - y_F^2 \mp 2i(x_P - x_F)y_F] e^{\pm 2i\theta - \frac{i\omega z}{q} p},$$

$$A_{\pm}^{(2,1)} = \frac{3}{2} \sum_{\substack{k, l, m \\ R < R_0}} \frac{1}{R^5} [(x_P - x_P) - y_P^2 \pm 2i(x_P - x_P)y_P] e^{-\frac{i\omega z_P}{q}},$$

$$A_{\pm}^{(2,2)} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{k, l, m \\ R < R_0}} \frac{1}{R^5} \left(1 - \frac{3x_P^2}{R^2}\right) e^{\pm 2i\theta - \frac{i\omega z_P}{q}},$$

$$A_{\pm}^{(1,3)} = \frac{3}{\sqrt{2}} \sum_{\substack{k, l, m \\ R < R_0}} \frac{x_P}{R^5} (x_P - x_P \mp i y_P) e^{\pm i\theta - \frac{i\omega z_P}{q}},$$

$$A_{\pm}^{(3,1)} = \frac{3}{\sqrt{2}} \sum_{\substack{k, l, m \\ R < R_0}} \frac{x_P}{R^5} (x_P - x_P \pm i y_P) e^{-\frac{i\omega z_P}{q}},$$

$$A_{\pm}^{(2,3)} = \frac{3}{\sqrt{2}} \sum_{\substack{k, l, m \\ R < R_0}} \frac{x_P}{R^5} (x_P - x_P \pm i y_P) e^{\pm i\theta - \frac{i\omega z_P}{q}},$$

$$A_{\pm}^{(3,2)} = \frac{3}{\sqrt{2}} \sum_{\substack{k, l, m \\ R < R_0}} \frac{x_P}{R^5} (x_P - x_P \mp i y_P) e^{-\frac{i\omega z_P}{q}},$$

$$A_{\pm}^{(3,3)} = - \sum_{\substack{k, l, m \\ R < R_0}} \frac{1}{R^5} \left(1 - \frac{3x_P^2}{R^2}\right) e^{\pm i\theta - \frac{i\omega z_P}{q}}.$$

Man hat also stets  $A_{+}^{(11)} = A_{-}^{(11)}$ .

Zu den Annahmen, die wir früher über die Konstitution des Kristalles gemacht haben, wollen wir jetzt die Annahme fügen, daß man jeder Molekel  $P$  ( $k, l, m$ ) eine andere Molekel  $P_1$  ( $k_1, l_1, m_1$ ) so zuordnen kann, daß:

$$x_P = x_{P_1}, \quad y_P = -y_{P_1}, \quad z_P = -z_{P_1}$$

und:

$$k - \bar{k} \equiv k - k_1 \pmod{p'},$$

d. h. daß:

$$\theta \equiv -\theta_1 \pmod{2\pi}.$$

Wir nehmen also an, daß die  $x$ -Achse eine zweizählige Symmetrieachse des Kristalles ist.

Wenn wir in unseren Ausdrücken für  $A_{\pm}^{(i,k)}$ :

$$e^{-\frac{i\omega z}{q}P}$$

durch den angenäherten Wert 1 ersetzen, so folgt aus dieser Annahme:

$$A_+^{(1,2)} = A_-^{(1,2)}, A_+^{(2,1)} = A_-^{(2,1)}, A_+^{(2,2)} = A_-^{(2,2)}, A_+^{(1,3)} = -A_-^{(1,3)}, \\ A_+^{(3,1)} = -A_-^{(3,1)} = A_-^{(3,2)} = -A_+^{(3,2)}, A_+^{(3,3)} = A_-^{(3,3)}.$$

Die Gleichung (4) zeigt, daß unter diesen Umständen:

$$Q_+ = Q_-$$

und also:

$$q_+^2 = q_-^2.$$

Die beiden zirkular polarisierten Wellen pflanzen sich mit derselben Geschwindigkeit fort. Eine Drehung der Polarisationssebene findet nicht statt.

Wir setzen jetzt für:

$$e^{-\frac{i\omega z}{q}P} : 1 - \frac{i\omega z}{q}P.$$

Die aus dem zweiten Gliede hervorgehenden Glieder in  $A_{\pm}^{(i,k)}$  bezeichnen wir mit  $\delta A_{\pm}^{(i,k)}$ . Wir haben:

$$\delta A_+^{(1,1)} = \delta A_-^{(1,1)} = 0,$$

$$\delta A_+^{(1,2)} = -\delta A_-^{(1,2)} = \frac{3\omega}{2q} \sum_{\substack{k,l,m \\ R < R_0}} \frac{z_P}{R^3} \{ [(x_P - x_P)^2 - y_P^2] \sin 2\theta + \\ + 2(x_P - x_P)y_P \cos 2\theta \},$$

$$\delta A_+^{(2,1)} = -\delta A_-^{(2,1)} = \frac{3\omega}{q} \sum_{\substack{k,l,m \\ R < R_0}} \frac{1}{R^3} (x_P - x_P)y_P z_P,$$

$$\delta A_+^{(2,2)} = -\delta A_-^{(2,2)} = \frac{\omega}{2q} \sum_{\substack{k,l,m \\ R < R_0}} \frac{z_P}{R^3} \left( 1 - \frac{z_P^2}{R^2} \right) \sin 2\theta,$$

$$\delta A_+^{(1,3)} = \delta A_-^{(1,3)} = -\frac{3i\omega}{\sqrt{2}q} \sum_{\substack{k,l,m \\ R < R_0}} \frac{z_P^2}{R^3} [(x_P - x_P) \cos \theta + y_P \sin \theta],$$

$$\delta A_+^{(3,1)} = \delta A_-^{(3,1)} = \delta A_+^{(3,2)} = \delta A_-^{(3,2)} = -\frac{3i\omega}{\sqrt{2}q} \sum_{\substack{k,l,m \\ R < R_0}} \frac{1}{R^3} (x_P - x_P) z_P^2,$$

$$\delta A_+^{(3,3)} = -\delta A_-^{(3,3)} = -\frac{\omega}{q} \sum_{\substack{k,l,m \\ R < R_0}} \frac{z_P}{R^3} \left( 1 - \frac{z_P^2}{R^2} \right) \sin \theta.$$

Die Gleichung (4) ergibt wegen dieser Beziehungen zwischen  $\delta A_+^{(i,k)}$  und  $\delta A_-^{(i,k)}$ :

$$\delta Q_+ = -\delta Q_-$$

und also:

$$\delta q_+ = -\delta q_-.$$

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten der beiden zirkular polarisierten Wellen sind um denselben Betrag, aber in entgegengesetzten Richtungen verschoben worden. In einem Kristall mit der von uns angenommenen Konstitution findet tatsächlich eine Drehung statt.

Es erübrigt sich, die Frage zu beantworten zu versuchen, ob unsere Formeln imstande sind, die Drehung darzustellen, die man tatsächlich bei gewissen Kristallen wie z. B. Quarz beobachtet hat. Wir müssen dabei zunächst gestehen, daß wir vorläufig nicht imstande sind, einen quantitativen Vergleich zwischen Theorie und Erfahrung anzustellen. Zu diesem Zweck wäre es notwendig, die Konstitution eines drehenden Kristalles im einzelnen zu kennen und das tun wir noch nicht. Andererseits dürfen wir erwarten, daß wir binnen kurzem diese noch mangelnden Kenntnisse besitzen werden. Es scheint mir unter diesen Umständen nicht zweckmäßig, aus freier Hand ein Bild von dem Kristalle zu entwerfen, um auf diese Weise Theorie und Erfahrung zu vergleichen. Ich ziehe es vor, mich vorläufig auf einen qualitativen Vergleich zu beschränken.

Wir haben uns dann zunächst darüber klar zu werden, ob unsere Theorie eine Drehung von der Größe, wie sie z. B. bei Quarz vorkommt, erklären kann, obwohl die Entfernung,  $d$ , zwischen zwei angrenzenden Molekeln so klein neben der Wellenlänge ist. Wenn wir mit dem Zeichen (=) Gleichheit in bezug auf die Größenordnung bezeichnen, so haben wir:

$$\frac{\delta q}{q} (=) \frac{\delta Q}{Q} (=) \frac{\delta A^{(i,k)}}{A^{(i,k)}}.$$

Den Wert des letzten Bruches können wir nun nicht angeben. Wir können aber leicht den entsprechenden Ausdruck für die einzelnen Glieder in  $A^{(i,k)}$  berechnen. Wir sehen, daß er mindestens von der Größenordnung  $d/\lambda$  ist, wenn  $\lambda$  die Wellenlänge ist. Nun haben wir für grünes Licht  $\lambda$  etwa  $= 5 \cdot 10^{-5}$  cm.

Wenn wir  $d = 10^{-8}$  cm setzen, so bekommen wir  $d/\lambda = 2 \cdot 10^{-3}$ . Bei Quarz haben wir für diese Wellenlänge:

$$\frac{\delta q}{q} = 2,5 \cdot 10^{-5}.$$

Eine Schwierigkeit macht also eine Drehung von der Größe, die man in Quarz beobachtet, nicht.

Wir haben schließlich zu untersuchen, wie die Drehung von der Frequenz abhängt. Wir bemerken zunächst, daß unsere  $\delta A^{(i, k)}$  alle den Faktor  $\omega$  enthalten. Wenn  $\omega$  nur in dieser Weise vorkommen würde, und wenn man also von der Abhängigkeit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit von  $\omega$  absehen könnte, so würde die Drehung,  $\alpha$ , in einer Schicht von der Dicke  $h$ :

$$\alpha = \frac{1}{2} h \omega \frac{q_+ - q_-}{q^2}$$

proportional mit dem Quadrate der Frequenz wachsen, was mit dem Biotschen Gesetz übereinstimmen würde. Tatsächlich ergeben unsere Formeln eine wesentlich kompliziertere Abhängigkeit von  $\omega$  und in der Tat ist ja das Biotsche Gesetz nicht bestätigt worden.

Mit diesen Andeutungen müssen wir uns hier begnügen in der Hoffnung, daß die Untersuchungen über den Gang der Röntgenstrahlen durch Kristalle uns binnen kurzem die Kenntnisse geben werden, die für eine quantitative Prüfung der Theorie notwendig sind.

4. *Über die Drehung der Polarisationssebene in einer organischen Flüssigkeit.* — Wir betrachten ein Gemisch von zwei flüssigen Komponenten. Die Molekeln der einen Komponente, des Lösungsmittels, sollen unter sich gleichartig sein und je einen Resonator tragen.  $\Phi_1$  sei das elektrische Moment desselben. Die Molekeln des gelösten Stoffes sollen ebenfalls unter sich gleichartig sein, aber je vier Resonatoren tragen, deren Schwingungsmittelpunkte die Ecken eines mit der Molekel starr verbundenen Tetraeders sind. Die quasielastischen Kräfte, welche die Schwingungen dieser Resonatoren bestimmen, brauchen nicht isotrop zu sein. Wir nehmen aber an, daß, wenn dies nicht der Fall ist, es für jede Ecke ein rechtwinkliges Bezugssystem  $x_j, y_j, z_j$  gibt, in welchem die Komponenten der quasielastischen Kraft die Form:



$$-K_x^{(j)} \Phi_{2x}^{(j)}, \quad -K_y^{(j)} \Phi_{2y}^{(j)}, \quad -K_z^{(j)} \Phi_{2z}^{(j)} \quad (j = 1..4)$$

besitzen. Um die Lage einer solchen Molekel festzulegen, genügt es nicht, den Schwerpunkt derselben anzugeben. Man muß überdies ihre Orientierung im Raume bestimmen. Dazu kann man z. B. die Eulerschen Winkel  $\vartheta_j, \varphi_j, \psi_j$  benutzen, die das soeben eingeführte Bezugssystem mit einem im Raume festen Koordinatensystem bildet. Der Vektor  $\Phi_2^{(j)}$  ist also als eine Funktion der Größen  $\vartheta_j, \varphi_j, \psi_j$  aufzufassen. Die vier Systeme  $\vartheta_j, \varphi_j, \psi_j$  ( $j = 1..4$ ) sind selbstverständlich nicht voneinander unabhängig, sondern die Kenntnis eines dieser Systeme genügt, um die übrigen zu kennen.

Wir wollen annehmen, daß eine Welle parallel mit der z-Achse fortschreitet. Wir setzen:

$$\Phi_1 = \frac{1}{N_1} \Psi_1 e^{i\omega \left(t - \frac{z}{q}\right)},$$

$$\Phi_2^{(j)}(\vartheta_j, \varphi_j, \psi_j) = \frac{1}{N_2} \Psi_2^{(j)}(\vartheta_j, \varphi_j, \psi_j) e^{i\omega \left(t - \frac{z}{q}\right)}.$$

Hier ist  $N_1$  die Zahl der Molekeln erster Art pro Volumeneinheit und  $N_2$  diejenige der zweiten. — Unsere Aufgabe ist zu untersuchen, welcher Art die Wellen sind, die sich in der Flüssigkeit fortpflanzen können, und die Fortpflanzungsgeschwindigkeit derselben zu bestimmen. Wir setzen voraus, daß die Wellenlänge groß neben dem durchschnittlichen Abstände zwischen zwei angrenzenden Molekeln derselben Art ist.

Wir stellen zunächst die Schwingungsgleichung eines Resonators der ersten Art auf. Die Molekeln, die sich außerhalb einer Kugel  $R = R_0$  befinden, üben auf den Resonator Kräfte aus, deren Resultierende, wenn wir in derselben Weise wie im zweiten Paragraphen rechnen:

$$\begin{aligned} & \frac{4\pi}{3} \frac{2q^3 + c^3}{c^3 - q^3} e^{i\omega \left(t - \frac{z}{q}\right)} \left\{ \Psi_1 + \frac{1}{8\pi^2} \sum_j^{1..4} \int \Psi_2^{(j)} d\Omega_j \right\} + \\ & + \frac{4\pi}{\omega^2(c^3 - q^3)} e^{i\omega t} \text{grad div} \left[ \left\{ \Psi_1 + \frac{1}{8\pi^2} \sum_j^{1..4} \int \Psi_3^{(j)} d\Omega_j \right\} e^{-\frac{i\omega z}{q}} \right] \\ & = e^{i\omega \left(t - \frac{z}{q}\right)} C \end{aligned}$$

ist, wo:

$$C = \frac{4\pi e}{c^2 - q^2} \left\{ \frac{1}{3} (2q^2 + c^2) + \right. \\ \left. + \frac{c^2 q^2}{\omega^2} \text{grad div} \right\} \left[ \left\{ \psi_1 + \frac{1}{8\pi^2} \sum_j^{1..4} \int \psi_j^{(j)} d\Omega_j \right\} e^{-\frac{i\omega z}{q}} \right]$$

und:

$$d\Omega_j = \sin \vartheta_j d\vartheta_j d\varphi_j d\psi_j, \\ 0 \leq \vartheta_j \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi_j, \quad \psi_j \leq 2\pi.$$

Man kann in Frage stellen, ob es erlaubt ist, in derselben Weise wie im zweiten Paragraphen zu rechnen. Wir haben dort vorausgesetzt, daß der durchschnittliche Abstand zwischen zwei angrenzenden Molekeln derselben Art klein neben der Wellenlänge ist. Damit zwei Molekeln des gelösten Stoffes in demselben Sinne gleicher Art sein sollen, ist es aber notwendig, daß sie, der Orientierung im Raume nach, demselben Elementarbereich  $d\Omega$  angehören. Es ist also notwendig; daß der durchschnittliche Abstand zwischen zwei angrenzenden Molekeln der zweiten Art, die dieser Bedingung genügen, klein neben der Wellenlänge ist, ein Vorbehalt von wesentlich mehr einschränkender Art als die oben eingeführten. Wenn wir aber nur nach dem durchschnittlichen Wert der fraglichen Kraft für alle diejenigen Molekeln erster Art fragen, die in einer Schicht  $z - z + dz$  gelegen sind, deren Dicke klein neben der Wellenlänge ist, so ist unser Ausdruck unter den oben angegebenen Voraussetzungen richtig.

Die Kräfte, welche die Molekeln innerhalb der Kugel  $R = R_0$  ausüben, können wir vernachlässigen. Bei der soeben erwähnten Mittelung sind nämlich diese Kräfte regellos in allen möglichen Richtungen verteilt. Im Durchschnitt geben sie bei der hier angestrebten Genauigkeit nur ein kleines und hier bedeutungsloses Glied in dem Ausdruck für  $q$ . — Wenn wir:

$$-L_1 \omega^2 + M_1 i\omega + K_1 = H_1$$

setzen, so bekommen wir also:

$$(1) \quad \psi_1 = \frac{N_1}{H_1} C.$$

Wesentlich komplizierter ist die entsprechende Gleichung für einen Resonator in einer Molekel des gelösten Stoffes. Zwar können wir auch jetzt von den Kräften absehen, die andere

nahe gelegene Resonatoren ausüben. Aber von den Kräften, die die anderen Resonatoren in derselben Molekel ausüben, können wir nicht absehen. Wir erhalten, wenn wir:

$$L_2^{(j)} \omega^3 + M_2^{(j)} \omega + K_2^{(j)} x, y, z = H_2^{(j)} x, y, z$$

setzen:

$$(2) \left\{ \begin{aligned} & (H_2^{(j)} \psi_2^{(j)})_{x_j, y_j, z_j} + \\ & + \sum_n^{1..4} \left\{ \frac{1}{R_{jn}^3} \psi_2^{(n)} - \frac{3 R_{jn}}{R_{jn}^5} (R_{jn} \times \psi_2^{(n)}) \right\}_{x_j, y_j, z_j} e^{-\frac{i\omega}{q}(x^{(n)} - x^{(j)})} \\ & = N_2 C_{x_j, y_j, z_j}. \end{aligned} \right.$$

Das Zeichen  $\Sigma'$  soll wie gewöhnlich andeuten, daß in der Summe ein (unendlich großes) Glied weggelassen werden soll. Der Vektor  $R_{jn}$  weist vom Resonator mit Index  $j$  zum Resonator mit Index  $n$  in derselben Molekel. Wir multiplizieren unsere Gleichungen (2) mit:

$$R_{ji} \cos(R_{ji}, x_j), \quad R_{ji} \cos(R_{ji}, y_j), \quad R_{ji} \cos(R_{ji}, z_j)$$

und bekommen:

$$\begin{aligned} R_{ji} \sum_{x, y, z} H_{2x_j}^{(j)} \psi_{2x_j}^{(j)} \cos(R_{ji}, x_j) + \sum_n^{1..4} \left\{ \frac{1}{R_{jn}^3} (R_{ji} \times \psi_2^{(n)}) - \right. \\ \left. - \frac{3}{R_{jn}^5} (R_{jn} \times R_{ji})(R_{jn} \times \psi_2^{(n)}) \right\}_{x_j, y_j, z_j} e^{-\frac{i\omega}{q}(x^{(n)} - x^{(j)})} = N_2 (R_{ji} \times C). \end{aligned}$$

Wir haben für  $n = 1..4$  ( $n \neq j$ ):

$$\frac{1}{R_{jn}} (\psi_2^{(j)} \times R_{jn}) = \sum_{x, y, z} \psi_{2x_j}^{(j)} \cos(R_{jn}, x_j).$$

Wir können folglich, vorausgesetzt, daß die drei Vektoren  $R_n$  nicht komplanar sind, solche, nur von den geometrischen Eigenschaften des Resonatortetraeders abhängige Größen  $a_{x_j}^{jn}$ ,  $a_{y_j}^{jn}$ ,  $a_{z_j}^{jn}$  ( $j, n = 1..4$ ,  $j \neq n$ ) bestimmen, daß:

$$\psi_{2x_j}^{(j)} = \sum_n^{1..4} a_{x_j}^{jn} (\psi_2^{(j)} \times R_{jn}).$$

Wenn wir 12 Vektoren  $a^{jn}$  einführen, deren Komponenten entlang  $x_j, y_j, z_j$ :  $a_{x_j}^{jn}$ ,  $a_{y_j}^{jn}$ ,  $a_{z_j}^{jn}$  sind, so können wir diese Gleichungen folgendermaßen schreiben:

$$(3) \quad \psi_2^{(j)} = \sum_n^{1..4} a^{jn} (\psi_2^{(j)} \times R_{jn}).$$

Die Vektoren  $a^{jn}$  sind starr verbunden mit der Molekel.  
— Wir setzen:

$$R_{ji} \sum_{x, y, z} H_{2xj}^{(j)} a_{xj}^{jn} \cos(R_{ji}, \alpha_j) = H_{2n}^{(jl)}$$

und erhalten dann:

$$\begin{aligned} \sum_n^{1..4} \left\{ H_{2n}^{(jl)} (R_{jn} \times \psi_2^{(j)}) + \frac{1}{R_{jn}^3} (R_{ji} \times \psi_2^{(n)}) e^{-\frac{i\omega}{q}(z^{(n)} - z^{(j)})} \right. \\ \left. - 3 \sum_n^{1..4} \frac{1}{R_{jn}^5} (R_{jn} \times R_{jl}) (R_{jn} \times \psi_2^{(n)}) e^{-\frac{i\omega}{q}(z^{(n)} - z^{(j)})} \right\} \\ = N_2 (R_{ji} \times C). \end{aligned}$$

Wir haben:

$$R_{ji} = R_{ni} - R_{nj}.$$

Wenn wir  $j$  und  $l$  alle Werte von 1 bis 4 unter Beachtung davon, daß  $j \geq l$ , annehmen lassen, so erhalten wir also 12 lineare Gleichungen, um die 12 Größen:

$$R_{ji} \times \psi_2^{(j)}$$

zu bestimmen. Wir bezeichnen mit  $A_{km}^{jl}$  ( $1 \leq j, k, l, m \leq 4$ ,  $j \geq l, k \geq m$ ) 144 Größen, die den Gleichungen:

$$(4) \quad \left\{ \sum_n^{1..4} \left\{ H_{2n}^{(jl)} A_{km}^{jn} + \frac{1}{R_{jn}^3} (A_{km}^{nl} - A_{km}^{nj}) e^{-\frac{i\omega}{q}(z^{(n)} - z^{(j)})} \right\} + \right. \\ \left. + 3 \sum_n^{1..4} \frac{1}{R_{jn}^5} (R_{jn} \times R_{jl}) A_{km}^{nj} e^{-\frac{i\omega}{q}(z^{(n)} - z^{(j)})} \right\} = 1,$$

wenn  $j = k, l = m$ , sonst = 0 genügen. Wir haben dann:

$$R_{ji} \times \psi_2^{(j)} = N_2 \sum_{km}^{1..4} A_{km}^{jl} (R_{km} \times C)$$

und folglich nach (3):

$$(5) \quad \psi_2^{(j)} = N_2 \sum_{k, m, n}^{1..4} a^{jn} A_{km}^{jn} (R_{km} \times C).$$

Wenn die Größen  $R_{km}^3 |H_{2n}^{(jl)}|$  groß neben 1 sind, so können wir  $A_{km}^{jl}$  in Potenzreihe nach den Größen:

$$\frac{1}{H_{2n}^{(j)}} \quad (j=1, 2, \dots, n)$$

entwickeln. Man berechnet leicht die ersten Glieder. Man findet, daß die von  $A_{km}^{jl}$  herrührenden Glieder:

$$e^{-\frac{i\omega}{q}(z^{(k)} - z^{(j)})}$$

als Faktor enthalten. Die Gleichungen (4) zeigen, daß dies bestehen bleibt, wie weit man auch die Annäherung treibt. Wir können deshalb:

$$A_{km}^{jl} = a_{km}^{jl} e^{-\frac{i\omega}{q}(z^{(k)} - z^{(j)})} = a_{km}^{jl} \left(1 - \frac{i\omega}{q}(z^{(k)} - z^{(j)})\right)$$

setzen, wo  $a_{km}^{jl}$  nur von den inneren Eigenschaften des Resonantortetraeders, nicht von der Orientierung desselben im Raume oder von  $\omega$  abhängt. Wir erhalten so:

$$\psi_2^{(j)} = N_2 \sum_{k, m, n}^{1 \dots 4} a^{jn} a_{km}^{jn} \left\{1 - \frac{i\omega}{q}(z^{(k)} - z^{(j)})\right\} (R_{km} \times C).$$

Wir berechnen jetzt:

$$\frac{1}{8\pi^2} \int \psi_2^{(j)} d\Omega_j.$$

Die Integrale von der Form:

$$\frac{1}{8\pi^2} \int a^{jn} (R_{km} \times C) d\Omega_j$$

machen keine Schwierigkeit. Man sieht zunächst, daß dieser Vektor keine gegen  $C$  senkrechte Komponente besitzt. Wir gehen von einer beliebigen Lage der Molekel aus. Die Vektoren  $a^{jn}$  und  $R_{km}$  bilden in dieser Lage gewisse Winkel mit  $C$ . Wir drehen jetzt die Molekel um  $C$ , so daß diese Winkel unverändert bleiben. In allen diesen Lagen besitzt unser Integrand dieselbe Komponente in der Richtung von  $C$ . Dagegen dreht sich die gegen  $C$  senkrechte Komponente um  $C$ . Da alle diese Lagen dieselbe Wahrscheinlichkeit besitzen, so fällt also bei der Integration die gegen  $C$  senkrechte Komponente weg. — Eine einfache Rechnung ergibt schließlich für die mit  $C$  parallele Komponente:

$$\frac{1}{3} (a^{jn} \times R_{km}) C.$$

Wir betrachten ferner die Integrale vom Typus:

$$(6) \quad \frac{1}{8\pi^2} \int a^{jn} (R_{km} \times C) (z^{(k)} - z^{(j)}) d\Omega_j.$$

$\mathbf{p}$  sei ein beliebiger Einheitsvektor,  $\mathbf{z}$  ein entlang der positiven  $z$ -Achse gerichteter Einheitsvektor. Die Komponente entlang  $\mathbf{p}$  von unserem Integral ist:

$$\frac{1}{8\pi^2} \int (a^{jn} \times \mathbf{p}) (R_{km} \times C) (R_{jk} \times \mathbf{z}) d\Omega_j.$$

Wir setzen:

$$\begin{aligned} \cos(\mathbf{x}, \mathbf{x}_j) &= \alpha_{11}^j, & \cos(\mathbf{x}, \mathbf{y}_j) &= \alpha_{21}^j, & \cos(\mathbf{x}, \mathbf{z}_j) &= \alpha_{31}^j, \\ \cos(\mathbf{y}, \mathbf{x}_j) &= \alpha_{12}^j, & \cos(\mathbf{y}, \mathbf{y}_j) &= \alpha_{22}^j, & \cos(\mathbf{y}, \mathbf{z}_j) &= \alpha_{32}^j, \\ \cos(\mathbf{z}, \mathbf{x}_j) &= \alpha_{13}^j, & \cos(\mathbf{z}, \mathbf{y}_j) &= \alpha_{23}^j, & \cos(\mathbf{z}, \mathbf{z}_j) &= \alpha_{33}^j. \end{aligned}$$

Wir bezeichnen mit  $p_{11}, p_{12}, p_{13}$  die Komponenten von  $\mathbf{p}$ , mit  $p_{21}, p_{22}, p_{23}$  diejenigen von  $\mathbf{C}$ , mit  $p_{31}, p_{32}, p_{33}$  diejenigen von  $\mathbf{z}$  entlang den  $x, y, z$ -Achsen. Wir bezeichnen mit  $q_{11}, q_{12}, q_{13}$  die Komponenten entlang den  $x_j, y_j, z_j$ -Achsen von  $a^{jn}$ , mit  $q_{21}, q_{22}, q_{23}$  diejenigen von  $R_{km}$ , mit  $q_{31}, q_{32}, q_{33}$  diejenigen von  $R_{jk}$ . Unser Integral hat in diesen Bezeichnungen den Wert:

$$\frac{1}{8\pi^2} \int \sum_{i,k}^{1,2,3} p_{1i} q_{1k} a_{ki} \sum_{i,k}^{1,2,3} p_{2i} q_{2k} a_{ki} \sum_{i,k}^{1,2,3} p_{3i} q_{3k} a_{ki} d\Omega_j.$$

Wir müssen also die Integrale vom Typus:

$$\frac{1}{8\pi^2} \int a_{ki} a_{k'i'} a_{k''i''} d\Omega_j$$

berechnen, wo  $i, i', i''; k, k', k''$  den Wert 1, 2 oder 3 haben. Man sieht nun leicht (z. B. durch Benutzung der Eulerschen Winkel), daß nur diejenigen Produkte von drei  $a$ , die in den Gliedern der Determinante:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

vorkommen, einen von Null verschiedenen Wert haben und daß dieser Wert  $\pm 4\pi^2/3$  ist, wo das Vorzeichen zu wählen ist, das dem Produkte in der Determinante zukommt. Man sieht infolgedessen ohne Schwierigkeit, daß der Wert unseres Integrals:

$$\frac{1}{6} \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{vmatrix}$$

ist. Die erste Determinante können wir in vektorieller Bezeichnung:

$$\mathbf{p} \times \mathbf{C} \wedge \mathbf{z}$$

schreiben und die zweite:

$$\mathbf{a}^{jn} \times \mathbf{R}_{km} \wedge \mathbf{R}_{jk}.$$

Das Integral (6) hat also den Wert:

$$\frac{1}{6} (\mathbf{C} \wedge \mathbf{z}) (\mathbf{a}^{jn} \times \mathbf{R}_{km} \wedge \mathbf{R}_{jk}).$$

Wir setzen:

$$\frac{1}{3} \sum_{k, m, n}^{1..4} (\mathbf{a}^{jn} \times \mathbf{R}_{km}) \mathbf{a}_{km}^{jn} = \mathbf{A}^{(j)},$$

$$\frac{1}{6} \sum_{k, m, n}^{1..4} (\mathbf{a}^{jn} \times \mathbf{R}_{km} \wedge \mathbf{R}_{jk}) \mathbf{a}_{km}^{jn} = \mathbf{B}^{(j)}.$$

Wir erhalten dann:

$$\frac{1}{8\pi^2} \int \Psi_2^{(j)} d\Omega_j = N_2 \left\{ \mathbf{A}^{(j)} \mathbf{C} - \frac{i\omega}{q} \mathbf{B}^{(j)} (\mathbf{C} \wedge \mathbf{z}) \right\}.$$

Wir setzen ferner:

$$\sum_j^{1..4} \mathbf{A}^{(j)} = \frac{1}{H_2}, \quad \sum_j^{1..4} \mathbf{B}^{(j)} = \mathbf{B}$$

und bekommen:

$$\Psi_1 + \frac{1}{8\pi^2} \sum_j^{1..4} \int \Psi_2^{(j)} d\Omega_j = \left( \frac{N_1}{H_1} + \frac{N_2}{H_2} \right) \mathbf{C} - \frac{i\omega}{q} N_2 \mathbf{B} (\mathbf{C} \wedge \mathbf{z}).$$

Wir hatten:

$$\mathbf{C} = \frac{4\pi e^{\frac{i\omega z}{q}}}{\sigma^2 - q^2} \left\{ \frac{1}{3} (2q^2 + c^2) + \frac{c^2 q^2}{\omega^2} \text{grad div} \right\} \left[ \left\{ \Psi_1 + \frac{1}{8\pi^2} \sum_j^{1..4} \int \Psi_2^{(j)} d\Omega_j \right\} e^{-\frac{i\omega z}{q}} \right].$$

Wir wollen annehmen, daß  $\mathbf{C} \times \mathbf{z} = 0$ . Wir setzen:

$$\frac{4\pi}{3} \frac{2q^3 + c^3}{c^3 - q^3} = Q.$$

Wir erhalten dann:

$$\mathbf{C} = Q \left( \frac{N_1}{H_1} + \frac{N_2}{H_2} \right) \mathbf{C} - \frac{i\omega}{q} Q N_2 B (\mathbf{C} \wedge \mathbf{z})$$

oder:

$$\left\{ 1 - Q \left( \frac{N_1}{H_1} + \frac{N_2}{H_2} \right) \right\} \mathbf{C} = - \frac{i\omega}{q} Q N_2 B (\mathbf{C} \wedge \mathbf{z}).$$

Diese Gleichung durch einen reellen endlichen Vektor  $\mathbf{C}$  zu befriedigen, ist unmöglich. Wenn wir die Gleichung vektoriell mit  $\mathbf{z}$  multiplizieren, so folgt in der Tat, da wir angenommen haben, daß  $\mathbf{C} \times \mathbf{z} = 0$ :

$$\left\{ 1 - Q \left( \frac{N_1}{H_1} + \frac{N_2}{H_2} \right) \right\} (\mathbf{C} \wedge \mathbf{z}) = \frac{i\omega}{q} Q N_2 B \mathbf{C}.$$

Also:

$$(7) \quad \mathbf{C} \wedge \mathbf{z} = \pm i \mathbf{C}$$

und:

$$(8) \quad 1 - Q \left( \frac{N_1}{H_1} + \frac{N_2}{H_2} \right) = \pm \frac{\omega}{q} Q N_2 B.$$

Die Gleichung (7) lautet in Cartesischen Koordinaten:

$$C_y = \pm i C_x.$$

Sie zeigt, daß entlang der  $z$ -Achse zwei Wellen fortschreiten können, von denen eine rechts-, die andere linkszirkular polarisiert ist. Die Gleichung (8) zeigt, daß (wenn  $B \geq 0$ ) diese beiden Wellen verschiedene Fortpflanzungsgeschwindigkeiten haben. Aus (8) folgt:

$$\frac{1}{Q} = \frac{3}{4\pi} \frac{c^3 - q^3}{2q^3 + c^3} = \frac{N_1}{H_1} + \frac{N_2}{H_2} \pm \frac{\omega}{q} N_2 B$$

und also:

$$(9) \quad \frac{c^3}{q^3} = 1 + \frac{4\pi \left\{ \frac{N_1}{H_1} + \frac{N_2}{H_2} \pm \frac{\omega}{q} N_2 B \right\}}{1 - \frac{4\pi}{3} \left\{ \frac{N_1}{H_1} + \frac{N_2}{H_2} \pm \frac{\omega}{q} N_2 B \right\}}.$$

Nehmen wir an, daß  $B$  eine kleine Größe ist und bezeichnen wir mit  $q_+$ , bzw.  $q_-$  die Werte von  $q$ , die dem oberen bzw. dem unteren Vorzeichen in (7) entsprechen, so folgt:

$$(10) \quad \frac{q_+ - q_-}{q^3} = - \frac{4\pi \omega N_2 B}{c^3 \left\{ 1 - \frac{4\pi}{3} \left( \frac{N_1}{H_1} + \frac{N_2}{H_2} \right) \right\}^2}.$$



Da in derselben Annäherung:

$$\frac{c^2}{q^2} = 1 + \frac{4\pi \left( \frac{N_1}{H_1} + \frac{N_2}{H_2} \right)}{1 - \frac{4\pi}{3} \left( \frac{N_1}{H_1} + \frac{N_2}{H_2} \right)},$$

so können wir diese Formel auch folgendermaßen schreiben:

$$(11) \quad \frac{q+ - q-}{q^2} = - \frac{4\pi\omega}{9c^2} \left( 2 + \frac{c^2}{q^2} \right) N_2 B.$$

Wir haben uns bisher auf den Fall beschränkt, wo das Gemisch nur zwei Komponenten enthält. Man behandelt indessen ebenso leicht den allgemeinsten Fall. Wir wollen annehmen, daß das Gemisch eine Anzahl,  $P_1$ , verschiedener Arten von Molekeln enthält, die je einen Resonator tragen und eine Anzahl  $P_2$ , die je vier Resonatoren tragen. Man bekommt, wenn der Index  $\alpha$  sich auf die ersten Molekeln bezieht und der Index  $\beta$  auf die letzteren und wenn wir vom Anfang an  $C \times z = 0$  annehmen:

$$C = Q \left\{ \sum_{\alpha}^{1..P_1} \psi_{\alpha} + \frac{1}{8\pi^2} \sum_{\beta}^{1..P_2} \sum_j^{1..4} \int \psi_{\beta}^{(j)} d\Omega_j \right\},$$

$$\psi_{\alpha} = \frac{N_{\alpha}}{H_{\alpha}} C, \quad .$$

$$\frac{1}{8\pi^2} \int \psi_{\beta}^{(j)} d\Omega_j = N_{\beta} \left\{ A_{\beta}^{(j)} C - \frac{i\omega}{q} B_{\beta}^{(j)} (C \wedge z) \right\}.$$

Also, wenn wir

$$\sum_j^{1..4} A_{\beta}^{(j)} = \frac{1}{H_{\beta}}, \quad \sum_j^{1..4} B_{\beta}^{(j)} = B_{\beta}$$

setzen:

$$\left\{ 1 - Q \sum_{\alpha}^{1..P_1} \frac{N_{\alpha}}{H_{\alpha}} - Q \sum_{\beta}^{1..P_2} \frac{N_{\beta}}{H_{\beta}} \right\} C = - \frac{i\omega}{q} Q \sum_{\beta}^{1..P_2} N_{\beta} B_{\beta} (C \wedge z)$$

und folglich:

$$C \wedge z = \pm i C,$$

$$1 - Q \sum_{\alpha}^{1..P_1} \frac{N_{\alpha}}{H_{\alpha}} - Q \sum_{\beta}^{1..P_2} \frac{N_{\beta}}{H_{\beta}} = \pm \frac{\omega}{q} Q \sum_{\beta}^{1..P_2} N_{\beta} B_{\beta}$$

und schließlich:

$$(9') \quad \frac{c^3}{q^2} = 1 + \frac{4\pi \left\{ \sum_a^{1..P_1} \frac{N_a}{H_a} + \sum_\beta^{1..P_2} \frac{N_\beta}{H_\beta} \pm \frac{\omega}{q} \sum_\beta^{1..P_2} N_\beta B_\beta \right\}}{1 - \frac{4\pi}{3} \left\{ \sum_a^{1..P_1} \frac{N_a}{H_a} + \sum_\beta^{1..P_2} \frac{N_\beta}{H_\beta} \pm \frac{\omega}{q} \sum_\beta^{1..P_2} N_\beta B_\beta \right\}}$$

und annähernd:

$$(10') \quad \frac{q_+ - q_-}{q^2} = - \frac{4\pi \omega \sum_\beta^{1..P_2} N_\beta B_\beta}{c^3 \left[ 1 - \frac{4\pi}{3} \left\{ \sum_a^{1..P_1} \frac{N_a}{H_a} + \sum_\beta^{1..P_2} \frac{N_\beta}{H_\beta} \right\} \right]^2}$$

oder:

$$(11') \quad \frac{q_+ - q_-}{q^2} = - \frac{4\pi \omega}{9c^2} \left( 2 + \frac{c^3}{q^2} \right)^2 \sum_\beta^{1..P_2} N_\beta B_\beta.$$

Unsere Formeln umfassen auch den Fall, wo die quasi-elastischen Kräfte, die auf die Resonatoren wirken, isotrop sind. In diesem wichtigen Spezialfall führt man indessen die Berechnung zweckmäßig in etwas anderer Weise aus. Zur Bestimmung der Größen  $A_{km}^{jl}$  bekommen wir die einfacheren Gleichungen:

$$H_2^{(j)} A_{km}^{jl} + \sum_n^{1..4} \left\{ \frac{1}{R_{jn}^3} (A_{km}^{ni} - A_{km}^{nj}) + \frac{3}{R_{jn}^5} (\mathbf{R}_{jn} \times \mathbf{R}_{jl}) A_{km}^{nj} \right\} e^{-\frac{i\omega}{q} (z^{(n)} - z^{(j)})} = 1,$$

wenn  $j = k, l = m$ , sonst = 0. — Haben wir  $A_{km}^{jl}$  bestimmt, so erhalten wir:

$$H_2^{(j)} \Psi_2^{(j)} + \sum_k^{1..4} \frac{1}{R_{jk}^3} \Psi_2^{(k)} e^{-\frac{i\omega}{q} (z^{(k)} - z^{(j)})} = N_2 C \\ - 3 N_2 \sum_{k, m, n}^{1..4} A_{km}^{nj} \frac{\mathbf{R}_{jn}}{R_{jn}^5} (\mathbf{R}_{km} \times \mathbf{C}) e^{-\frac{i\omega}{q} (z^{(n)} - z^{(j)})}.$$

Wir bestimmen 16 Größen  $A_{jl}$  durch die Gleichungen:

$$H_2^{(j)} A_{jl} + \sum_k^{1..4} \frac{1}{R_{jk}^3} A_{kl} e^{-\frac{i\omega}{q} (z^{(k)} - z^{(j)})} = 1,$$

wenn  $j = l$  und sonst  $= 0$ . Wir erhalten dann:

$$\begin{aligned} \Psi_2^{(j)} &= N_2 C \sum_l^{1..4} A_{jl} \\ &\quad - 3 N_2 \sum_{k, l, m, n} A_{km}^{nl} A_{jl} \frac{R_{ln}}{R_{ln}^3} (R_{km} \times C) e^{-\frac{i\omega}{q}(z^{(m)} - z^{(l)})}. \end{aligned}$$

Wiederum können wir:

$$A_{km}^{jl} = a_{km}^{jl} e^{-\frac{i\omega}{q}(z^{(k)} - z^{(j)})} = a_{km}^{jl} \left(1 - \frac{i\omega}{q}(z^{(k)} - z^{(j)})\right)$$

und in derselben Weise:

$$A_{jl} = a_{jl} e^{-\frac{i\omega}{q}(z^{(l)} - z^{(j)})} = a_{jl} \left(1 - \frac{i\omega}{q}(z^{(l)} - z^{(j)})\right)$$

setzen. Wir erhalten:

$$\begin{aligned} \Psi_2^{(j)} &= N_2 C \sum_l^{1..4} a_{jl} \left(1 - \frac{i\omega}{q}(z^{(l)} - z^{(j)})\right) \\ &\quad - 3 N_2 \sum_{k, l, m, n}^{1..4} a_{km}^{nl} a_{jl} \left(1 - \frac{i\omega}{q}(z^{(k)} - z^{(j)})\right) \frac{R_{ln}}{R_{ln}^3} (R_{kn} \times C). \end{aligned}$$

Die Mittelwertberechnung führen wir in derselben Weise wie oben aus. Wir setzen:

$$\begin{aligned} \sum_l^{1..4} a_{jl} \left\{1 - \sum_{k, m, n}^{1..4} a_{km}^{nl} (R_{ln} \times R_{km}) \frac{1}{R_{ln}^3}\right\} &= A^{(j)}, \\ \frac{1}{2} \sum_{k, l, m, n}^{1..4} a_{km}^{nl} a_{jl} (R_{ln} \times R_{km} \wedge R_{kj}) \frac{1}{R_{ln}^3} &= B^{(j)} \end{aligned}$$

und haben dann wieder:

$$\frac{1}{8\pi^2} \int \Psi_2^{(j)} d\Omega_j = N_2 \left\{ A^{(j)} C - \frac{i\omega}{q} B^{(j)} (C \wedge z) \right\}$$

usw.

Wir haben bis jetzt unsere Betrachtungen möglichst allgemein gehalten. Wir haben uns nur die Beschränkung auferlegt, daß keine Molekel mehr als vier Resonatoren tragen soll. Man sieht leicht, daß diese Annahme unwesentlich ist

und daß unsere Formeln mit geringfügigen Modifikationen bestehen bleiben, wenn wir diese Annahme fallen lassen. — Wir wollen jetzt ein spezielles Beispiel behandeln. Es hat den Zweck, in einfacher Weise zu zeigen, daß die Größe  $B$  nicht identisch verschwindet.

Wir wollen annehmen, daß vier Resonatoren sich in den Ecken eines irregulären Tetraeders befinden und daß in jeder Ecke die zugehörige  $x_j$ -Achse mit dem Vektor  $\mathbf{R}_{jj+1}$  zusammenfällt, wobei wir unter  $\mathbf{R}_{44} : \mathbf{R}_{41}$  verstehen. Wir nehmen ferner an, daß die quasielastischen Kräfte, die senkrecht gegen die  $x_j$ -Achsen wirken, sehr stark sind, so daß die Schwingungen der Resonatoren praktisch entlang den  $x_j$ -Achsen geschehen. Wir bezeichnen mit  $F_j$  die (positive oder negative) Größe des Vektors  $\Psi_2^{(j)}$ . Wir setzen also:

$$\Psi_2^{(j)} = \frac{F_j}{R_{jj+1}} \mathbf{R}_{jj+1}.$$

Zur Bestimmung von  $F_j$  bekommen wir alsdann vier Gleichungen:

$$\begin{aligned} H_2^{(j)} F^{(j)} + \sum_n^{1..4} \frac{F^{(n)}}{R_{jn} R_{jj+1} R_{nn+1}} \left\{ \mathbf{R}_{jj+1} \times \mathbf{R}_{nn+1} - \right. \\ \left. - \frac{3}{R_{jn}^2} (\mathbf{R}_{jj+1} \times \mathbf{R}_{jn}) (\mathbf{R}_{jn} \times \mathbf{R}_{nn+1}) \right\} e^{-\frac{i\omega}{q} (z^{(n)} - z^{(j)})} \\ = \frac{N_2}{R_{jj+1}} (\mathbf{C} \times \mathbf{R}_{jj+1}). \\ (H_2^{(j)} = H_{2xj}^{(j)}). \end{aligned}$$

Wir erhalten hieraus:

$$F^{(j)} = N_2 \sum_n^{1..4} A_n^j (\mathbf{C} \times \mathbf{R}_{nn+1}) \frac{1}{R_{nn+1}},$$

wo  $A_n^j$  die Form:

$$a_n^{(j)} e^{-\frac{i\omega}{q} (z^{(n)} - z^{(j)})}$$

hat und wo ersichtlich  $a_n^j = a_j^n$ . — Wir bekommen hieraus:

$$B^{(j)} = \frac{1}{6} \frac{1}{R_{jj+1}} \sum_n^{1..4} \frac{a_n^{(j)}}{R_{nn+1}} (\mathbf{R}_{jj+1} \times \mathbf{R}_{nn+1} \wedge \mathbf{R}_{jn})$$

und:

$$B = \sum_j^{1 \dots 4} B^{(j)} = \frac{1}{3} \left( \frac{a_3^1}{R_{12} R_{34}} - \frac{a_4^3}{R_{23} R_{41}} \right) (R_{12} \times R_{34} \wedge R_{13}).$$

Wir wollen annehmen, daß die Größen:

$$|H_2^{(2)}|, \quad |H_2^{(4)}|$$

sehr groß sind. Man hat dann annähernd  $a_4^3 = 0$ , während  $a_3^1$  im allgemeinen einen von Null verschiedenen Wert hat. Wir ersehen hieraus, daß  $B$  nicht identisch verschwindet. Wir sehen auch, daß man selbst dann im allgemeinen eine Drehung erhält, wenn das Molekül des aktiven Stoffes nur zwei äolotrope Resonatoren trägt. Dieser Fall liegt nämlich vor, wenn wir  $|H_2^{(2)}|$  und  $|H_2^{(4)}|$  unendlich groß annehmen.

Von prinzipieller Bedeutung ist die Frage, ob  $B$  stets dann verschwindet, wenn die Resonatoren isotrop sind. Wir wollen zeigen, daß dem nicht so ist, und daß  $B$  selbst dann im allgemeinen einen von Null verschiedenen Wert hat, wenn die Resonatoren alle derselben Art sind. Wir betrachten zu dem Zweck den Fall, wo die Größen  $|H_2^{(j)}|$  groß neben:

$$\frac{1}{R_{kl}^3}$$

sind. Unsere Gleichungen für  $a_{km}^{jl}$  geben dann in erster Näherung:

$$a_{km}^{jl} = 0,$$

wenn nicht  $j = k, \quad l = m$ ;

$$a_{km}^{km} = \frac{1}{H_1^{(k)}}.$$

In zweiter Näherung erhalten wir:

$$a_{km}^{jl} = 0,$$

wenn nicht  $j = m$  oder  $l = m$ ;

$$a_{km}^{ml} = \frac{1}{H_2^{(k)} H_2^{(m)}} \frac{1}{R_{km}^3} \left\{ 1 - \frac{8}{R_{km}^2} (R_{km} \times R_{lm}) \right\},$$

$$a_{km}^{jm} = - \frac{1}{H_2^{(j)} H_2^{(k)}} \frac{1}{R_{jk}^3},$$

wenn nicht  $j = k$ ,

$$a_{km}^{km} = \frac{1}{H_1^{(k)}}.$$

In dritter Näherung bekommen wir:

$$a_{km}^{jl} = - \frac{1}{H_1^{(j)} H_2^{(k)} H_3^{(m)}} \frac{1}{R_{jm}^3 R_{km}^3} \left\{ 1 - \frac{3}{R_{km}^2} (R_{km} \times R_{lm}) \right\} + \\ + \frac{1}{H_1^{(j)} H_2^{(k)} H_3^{(m)}} \frac{1}{R_{jm}^3 R_{km}^3} \left\{ 1 - \frac{3}{R_{km}^2} (R_{km} \times R_{jm}) \right\} \cdot \\ \left\{ 1 - \frac{3}{R_{jm}^2} (R_{jm} \times R_{jl}) \right\},$$

wenn nicht  $j = m$  oder  $l = m$ .

Für  $a_{jl}$  erhalten wir in derselben Weise in erster Näherung:

$$a_{jl} = 0,$$

wenn  $j \neq l$ ;

$$a_{jj} = \frac{1}{H_2^{(j)}},$$

und in zweiter Näherung:

$$a_{jl} = - \frac{1}{H_1^{(j)} H_2^{(l)}} \frac{1}{R_{jl}^3},$$

wenn  $j \neq l$ ,

$$a_{jj} = \frac{1}{H_2^{(j)}}.$$

Wenn wir diese Werte in unsere Ausdrücke für  $A^{(j)}$  und  $B^{(j)}$  einsetzen, so erhalten wir, wenn wir uns auf die größten Glieder beschränken:

$$A^{(j)} = \frac{1}{H_1^{(j)}},$$

$$B^{(j)} = \frac{1}{2 H_1^{(j)}} \sum_{k, m, n}^{1..4} \left\{ \frac{1}{R_{jn}^6} a_{km}^{nj} + \frac{1}{H_2^{(n)} R_{jn}^3 R_{mn}^3} a_{km}^{mn} - \right. \\ \left. - \frac{1}{H_2^{(m)} R_{jm}^3 R_{mn}^3} a_{km}^{nm} \right\} (R_{jn} \times R_{km} \wedge R_{kn}) = \\ - \frac{1}{2 H_2^{(1)} H_2^{(2)} H_2^{(3)} H_2^{(4)}} \sum_{k, m, n} \left[ \frac{1}{R_{jn}^6 R_{mn}^3 R_{km}^3} \left\{ 1 - \frac{3}{R_{km}^2} (R_{km} \times R_{jm}) - \right. \right. \\ \left. \left. - \left[ 1 - \frac{3}{R_{km}^2} (R_{km} \times R_{nm}) \right] \left[ 1 - \frac{3}{R_{nm}^2} (R_{nm} \times R_{nj}) \right] - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{R_{mn}^6 R_{jn}^3 R_{km}^3} \left\{ 1 - \frac{3}{R_{km}^2} (R_{km} \times R_{nm}) \right\} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{R_{mn}^6 R_{jm}^3 R_{kn}^3} \right\} (R_{jn} \times R_{km} \wedge R_{kn}) \right].$$

Für  $B$  erhalten wir hieraus den Ausdruck:

$$\begin{aligned}
 & -\frac{3}{2H_2^{(1)}H_2^{(2)}H_2^{(3)}H_2^{(4)}} \sum_{j,k,m,n}^{1..4} \left\{ \frac{1}{R_{jn}R_{nm}R_{km}R_{kn}} \left[ \frac{1}{R_{km}^3} (R_{km} \times R_{nj}) + \right. \right. \\
 & + \frac{1}{R_{nm}^3} (R_{nm} \times R_{nj}) - \frac{3}{R_{km}^3 R_{nm}^3} (R_{km} \times R_{nm})(R_{nm} \times R_{nj}) \left. \right] + \\
 & + \frac{1}{R_{nm}R_{jn}R_{km}R_{kn}} (R_{km} \times R_{nm}) (R_{jn} \times R_{km} \wedge R_{kn}) = \\
 & -\frac{3}{2H_2^{(1)}H_2^{(2)}H_2^{(3)}H_2^{(4)}} \sum_{j,k,m,n}^{1..4} \frac{1}{R_{jn}R_{nm}R_{km}R_{kn}} \left\{ R_{km} \times R_{nj} - \right. \\
 & - \frac{3}{R_{nm}^3} (R_{km} \times R_{nm})(R_{nm} \times R_{nj}) \left. \right\} (R_{jn} \times R_{km} \wedge R_{kn}).
 \end{aligned}$$

Um zu zeigen, daß dieser Ausdruck nicht identisch verschwindet, betrachten wir die Glieder, die im Nenner:

$$R_{12}^5 R_{34}^5$$

enthalten. Man findet:

$$\begin{aligned}
 & \frac{3}{H_2^{(1)}H_2^{(2)}H_2^{(3)}H_2^{(4)}} \frac{1}{R_{12}^5 R_{34}^5} \left\{ (R_{12} \times R_{34}) \left( \frac{1}{R_{12}^3} + \frac{1}{R_{24}^3} + \frac{1}{R_{13}^3} + \frac{1}{R_{34}^3} \right) - \right. \\
 & - \frac{3}{R_{14}^3} (R_{12} \times R_{14})(R_{14} \times R_{34}) - \frac{3}{R_{24}^3} (R_{12} \times R_{24})(R_{24} \times R_{34}) - \\
 & - \frac{3}{R_{13}^3} (R_{12} \times R_{13})(R_{13} \times R_{34}) - \frac{3}{R_{23}^3} (R_{12} \times R_{13})(R_{13} \times R_{34}) \left. \right\} \\
 & \quad \cdot (R_{12} \times R_{34} \wedge R_{43}).
 \end{aligned}$$

Nehmen wir an, daß  $R_{12}$  und  $R_{34}$  klein neben  $R_{14}$  sind, so erhalten wir hieraus annähernd:

$$\begin{aligned}
 & \frac{12}{H_2^{(1)}H_2^{(2)}H_2^{(3)}H_2^{(4)}} \frac{1}{R_{12}^5 R_{34}^5 R_{14}^5} \left\{ (R_{12} \times R_{34}) R_{14}^2 - \right. \\
 & - 3(R_{12} \times R_{14})(R_{14} \times R_{34}) \left. \right\} (R_{12} \times R_{34} \wedge R_{43}),
 \end{aligned}$$

also einen Ausdruck dritten Grades in den beiden Größen:

$$\frac{1}{R_{12}}, \frac{1}{R_{14}}.$$

Kein anderes Glied enthält diese beiden Größen in so hohem Grade. Wir schließen hieraus, daß  $B$  nicht identisch verschwindet. Dieses Ergebnis bleibt selbstverständlich bestehen, wenn wir  $H_2^{(1)} = H_2^{(2)} = H_2^{(3)} = H_2^{(4)}$  annehmen.

In dritter Näherung bekommen wir:

$$a_{km}^{jl} = - \frac{1}{H_2^{(j)} H_2^{(k)} H_2^{(m)}} \frac{1}{R_{jm}^3 R_{km}^3} \left\{ 1 - \frac{3}{R_{km}^2} (R_{km} \times R_{lm}) \right\} + \\ + \frac{1}{H_2^{(j)} H_2^{(k)} H_2^{(m)}} \frac{1}{R_{jm}^3 R_{km}^3} \left\{ 1 - \frac{3}{R_{km}^2} (R_{km} \times R_{jm}) \right\} \cdot \\ \left\{ 1 - \frac{3}{R_{jm}^2} (R_{jm} \times R_{jl}) \right\},$$

wenn nicht  $j = m$  oder  $l = m$ .

Für  $a_{jl}$  erhalten wir in derselben Weise in erster Näherung:

$$a_{jl} = 0,$$

wenn  $j \geq l$ ;

$$a_{jj} = \frac{1}{H_2^{(j)}},$$

und in zweiter Näherung:

$$a_{jl} = - \frac{1}{H_2^{(j)} H_2^{(l)}} \frac{1}{R_{jl}^3},$$

wenn  $j \geq l$ ,

$$a_{jj} = \frac{1}{H_2^{(j)}}.$$

Wenn wir diese Werte in unsere Ausdrücke für  $A^{(j)}$  und  $B^{(j)}$  einsetzen, so erhalten wir, wenn wir uns auf die größten Glieder beschränken:

$$A^{(j)} = \frac{1}{H_2^{(j)}},$$

$$B^{(j)} = \frac{1}{2 H_2^{(j)}} \sum_{k, m, n}^{1..4} \left\{ \frac{1}{R_{jn}^3} a_{km}^{nj} + \frac{1}{H_2^{(n)} R_{jn}^3 R_{mn}^3} a_{km}^{nn} - \right. \\ \left. - \frac{1}{H_2^{(m)} R_{jn}^3 R_{mn}^3} a_{km}^{nn} \right\} (R_{jn} \times R_{km} \wedge R_{kn}) = \\ - \frac{1}{2 H_2^{(1)} H_2^{(2)} H_2^{(3)} H_2^{(4)}} \sum_{k, m, n} \left[ \frac{1}{R_{jn}^3 R_{nm}^3 R_{km}^3} \left\{ 1 - \frac{3}{R_{km}^2} (R_{km} \times R_{jm}) - \right. \right. \\ \left. \left. - \left[ 1 - \frac{3}{R_{km}^2} (R_{km} \times R_{nm}) \right] \left[ 1 - \frac{3}{R_{nm}^2} (R_{nm} \times R_{nj}) \right] \right\} - \right. \\ \left. - \frac{1}{R_{nm}^3 R_{jn}^3 R_{km}^3} \left\{ 1 - \frac{3}{R_{km}^2} (R_{km} \times R_{nm}) \right\} - \right. \\ \left. - \frac{1}{R_{nm}^3 R_{jm}^3 R_{km}^3} \right] (R_{jn} \times R_{km} \wedge R_{kn}).$$



Für  $B$  erhalten wir hieraus den Ausdruck:

$$\begin{aligned} & - \frac{8}{2 H_2^{(1)} H_2^{(2)} H_2^{(3)} H_2^{(4)}} \sum_{j, k, m, n}^{1..4} \left\{ \frac{1}{R_{jn}^5 R_{nm}^5 R_{km}^5} \left[ \frac{1}{R_{km}^5} (R_{km} \times R_{nj}) + \right. \right. \\ & + \frac{1}{R_{nm}^5} (R_{nm} \times R_{nj}) - \frac{8}{R_{km}^5 R_{nm}^5} (R_{km} \times R_{nm}) (R_{nm} \times R_{nj}) \left. \right] + \\ & + \frac{1}{R_{nm}^5 R_{jn}^5 R_{km}^5} (R_{km} \times R_{nm}) \left. \right\} (R_{jn} \times R_{km} \wedge R_{kn}) = \\ & - \frac{8}{2 H_2^{(1)} H_2^{(2)} H_2^{(3)} H_2^{(4)}} \sum_{j, k, m, n}^{1..4} \frac{1}{R_{jn}^5 R_{nm}^5 R_{km}^5} \left\{ R_{km} \times R_{nj} - \right. \\ & - \frac{8}{R_{nm}^5} (R_{km} \times R_{nm}) (R_{nm} \times R_{nj}) \left. \right\} (R_{jn} \times R_{km} \wedge R_{kn}). \end{aligned}$$

Um zu zeigen, daß dieser Ausdruck nicht identisch verschwindet, betrachten wir die Glieder, die im Nenner:

$$R_{12}^5 R_{34}^5$$

enthalten. Man findet:

$$\begin{aligned} & \frac{8}{H_2^{(1)} H_2^{(2)} H_2^{(3)} H_2^{(4)}} \frac{1}{R_{12}^5 R_{34}^5} \left\{ (R_{12} \times R_{34}) \left( \frac{1}{R_{14}^5} + \frac{1}{R_{34}^5} + \frac{1}{R_{13}^5} + \frac{1}{R_{23}^5} \right) - \right. \\ & - \frac{8}{R_{14}^5} (R_{12} \times R_{14}) (R_{14} \times R_{34}) - \frac{8}{R_{24}^5} (R_{12} \times R_{24}) (R_{24} \times R_{34}) - \\ & - \frac{8}{R_{13}^5} (R_{12} \times R_{13}) (R_{13} \times R_{34}) - \frac{8}{R_{23}^5} (R_{12} \times R_{23}) (R_{23} \times R_{34}) \left. \right\} \\ & \cdot (R_{12} \times R_{34} \wedge R_{42}). \end{aligned}$$

Nehmen wir an, daß  $R_{12}$  und  $R_{34}$  klein neben  $R_{14}$  sind, so erhalten wir hieraus annähernd:

$$\begin{aligned} & \frac{12}{H_2^{(1)} H_2^{(2)} H_2^{(3)} H_2^{(4)}} \frac{1}{R_{12}^5 R_{34}^5 R_{14}^5} \left\{ (R_{12} \times R_{34}) R_{14}^2 - \right. \\ & - 3 (R_{12} \times R_{14}) (R_{14} \times R_{34}) \left. \right\} (R_{12} \times R_{34} \wedge R_{42}), \end{aligned}$$

also einen Ausdruck dritten Grades in den beiden Größen:

$$\frac{1}{R_{12}}, \quad \frac{1}{R_{14}}.$$

Kein anderes Glied enthält diese beiden Größen in so hohem Grade. Wir schließen hieraus, daß  $B$  nicht identisch verschwindet. Dieses Ergebnis bleibt selbstverständlich bestehen, wenn wir  $H_2^{(1)} = H_2^{(2)} = H_2^{(3)} = H_2^{(4)}$  annehmen.

Wir sehen also, daß ein Stoff, dessen Molekeln in den Ecken eines asymmetrischen Tetraeders vier isotrope Resonatoren tragen, optisch aktiv ist, daß die Drehung aber wesentlich von der *geometrischen* Asymmetrie des Tetraeders und nicht von den Eigenschaften der Resonatoren bedingt wird.

Wir wollen zum Schluß unsere Theorie dadurch erweitern, daß wir einige bis jetzt vernachlässigten Glieder in den Schwingungsgleichungen der Resonatoren des drehenden Stoffes berücksichtigen. Diese lauten vollständiger:

$$\begin{aligned} (H_2^{(j)} \psi_2^{(j)})_{x_j, y_j, z_j} + \sum_n^{1..4} \left\{ \left( \frac{1}{R_{jn}^3} - \frac{\omega^2}{2c^2 R_{jn}} \right) \psi_2^{(n)} - \right. \\ \left. - \frac{1}{R_{jn}^3} \left( \frac{3}{R_{jn}^2} + \frac{\omega^2}{2c^2 R_{jn}} \right) R_{jn} (R_{jn} \times \psi_2^{(n)}) \right\} e^{-\frac{i\omega}{q}(z^{(n)} - z^{(j)})} \\ = N_2 C_{x_j, y_j, z_j}. \end{aligned}$$

Wir multiplizieren wieder mit:

$$R_{ji} \cos(R_{ji}, x_j), \quad R_{ji} \cos(R_{ji}, y_j), \quad R_{ji} \cos(R_{ji}, z_j)$$

und bekommen:

$$\begin{aligned} \sum_n^{1..4} \left\{ H_2^{(j)n} (R_{jn} \times \psi_2^{(j)}) + \right. \\ \left. + \left( \frac{1}{R_{jn}^3} - \frac{\omega^2}{2c^2 R_{jn}} \right) R_{ji} \times \psi_2^{(n)} e^{-\frac{i\omega}{q}(z^{(n)} - z^{(j)})} - \right. \\ \left. - \frac{1}{R_{jn}^3} \left( \frac{3}{R_{jn}^2} + \frac{\omega^2}{2c^2 R_{jn}} \right) (R_{jn} \times R_{ji}) \cdot (R_{jn} \times \psi_2^{(n)}) e^{-\frac{i\omega}{q}(z^{(n)} - z^{(j)})} \right\} \\ = N_2 (R_{ji} \times C). \end{aligned}$$

Wir bestimmen die 144 Größen  $A_{km}^{jkl}$  ( $j, k, l, m = 1..4$ ;  $j \geq l, k \geq m$ ) aus den Gleichungen:

$$\begin{aligned} \sum_n^{1..4} \left\{ H_2^{(j)n} A_{km}^{jn} + \left( \frac{1}{R_{jn}^3} - \frac{\omega^2}{2c^2 R_{jn}} \right) (A_{km}^{nl} - A_{km}^{nj}) e^{-\frac{i\omega}{q}(z^{(n)} - z^{(j)})} + \right. \\ \left. + \frac{1}{R_{jn}^3} \left( \frac{3}{R_{jn}^2} + \frac{\omega^2}{2c^2 R_{jn}} \right) (R_{jn} \times R_{jl}) A_{km}^{nj} e^{-\frac{i\omega}{q}(z^{(n)} - z^{(j)})} \right\} = 1, \end{aligned}$$

wenn  $j = k$ ,  $l = m$ , sonst  $= 0$ . Wir haben dann:

$$R_{jl} \times \Psi_2^{(j)} = N_2 \sum_{k, m}^{1 \dots 4} A_{km}^{jl} (R_{km} \times C)$$

und also, wenn  $a^{jn}$  dieselbe Bedeutung wie oben hat:

$$\Psi_2^{(j)} = N_2 \sum_{k, m, n}^{1 \dots 4} a^{jn} A_{km}^{jn} (R_{km} \times C).$$

Wir haben wieder:

$$A_{km}^{jl} = a_{km}^{jl} e^{-\frac{i\omega}{q}(z^{(k)} - z^{(j)})},$$

wo  $a_{km}^{jl}$  von  $q$  unabhängig ist. Wir setzen:

$$A_{km}^{jl} = a_{km}^{jl} \left\{ 1 - \frac{i\omega}{q}(z^{(k)} - z^{(j)}) - \frac{\omega^2}{2q^2}(z^{(k)} - z^{(j)})^2 + \frac{i\omega^3}{6q^3}(z^{(k)} - z^{(j)})^3 \right\}.$$

Um

$$\frac{1}{8\pi^2} \int \Psi_2^{(j)} d\Omega_j$$

zu berechnen, müssen wir die beiden Integrale:

$$\frac{1}{8\pi^2} \int a^{jn} (R_{km} \times C) (z^{(k)} - z^{(j)})^p d\Omega_j \quad (p = 2, 3)$$

auswerten. Wir benutzen dazu dieselbe Methode, die wir oben zur Berechnung desselben Integrales mit  $p = 1$  angewandt haben. Da unsere Integrale offenbar davon unabhängig sind, wie wir das Bezugssystem  $x_j, y_j, z_j$  wählen, so können wir zweckmäßig bei dieser Berechnung die  $z_j$ -Achse entlang dem Vektor  $R_{jk}$  legen. Man findet so, daß das erste Integral den Wert:

$$\begin{aligned} & \frac{2}{15} C(a^{jn} \times R_{km}) R_{jk}^2 - \frac{1}{15} \left\{ C(a^{jn} \times R_{jk})(R_{km} \times R_{jk}) + \right. \\ & \quad \left. + \kappa(C \times \kappa)(a^{jn} \times R_{km}) R_{jk}^2 \right\} + \\ & \quad + \frac{1}{5} \kappa(C \times \kappa)(a^{jn} \times R_{jk})(R_{km} \times R_{jk}) \end{aligned}$$

und das zweite Integral den Wert:

$$\frac{1}{10} R_{jk}^2 (C \wedge z) (a^{jn} \times R_{kn} \wedge R_{jk})$$

hat. Wir nehmen an, daß  $C \times z = 0$ . Wir setzen:

$$A^{(j)} = \frac{1}{3} \sum_{k, m, n}^{1..4} a_{km}^{jn} \left\{ \left( 1 - \frac{\omega^2 R_{jk}^2}{6 q^2} \right) (a^{jn} \times R_{km}) \right. \\ \left. + \frac{\omega^2}{10 q^2} (a^{jn} \times R_{jk}) (R_{km} \times R_{jk}) \right\},$$

$$B^{(j)} = \frac{1}{6} \sum_{k, m, n}^{1..4} a_{km}^{jn} \left( 1 - \frac{\omega^2 R_{jk}^2}{10 q^2} \right) (a^{jn} \times R_{km} \wedge R_{jk}).$$

Wir haben dann wieder:

$$\frac{1}{8\pi^2} \int \Psi_2^{(j)} d\Omega_j = N_2 \left\{ A^{(j)} C - \frac{i\omega}{q} B^{(j)} (C \wedge z) \right\}$$

usw. Der einzige Unterschied wird, daß die Größen:

$$H_2 = \frac{1}{\sum_j^{1..4} A^{(j)}}$$

und  $B$  jetzt auch von  $q$  abhängig werden.

Wir fassen unsere Ergebnisse in den folgenden Sätzen zusammen. Der Einfluß der Wechselwirkung zwischen den Resonatoren in demselben Molekül auf die Fortpflanzung des Lichtes äußert sich qualitativ nur in einer Drehung der Polarisationssebene, d. h. darin, daß sich in jeder Richtung zwei zirkularpolarisierte Wellen mit verschiedenen Geschwindigkeiten fortpflanzen können. Die Drehung in einem aktiven Gemisch ist nicht additiv aus den von den aktiven Komponenten hervorgerufenen Drehungen zusammengesetzt. Dagegen ist die Drehung, durch

$$\left( 2 + \frac{c^2}{q^2} \right)^2$$

dividiert, in einer schwach absorbierenden Flüssigkeit eine lineare Funktion der Konzentrationen der aktiven Komponenten. Diese Drehung ist bei einem geometrisch asymmetrischen Moleküle eine notwendige Folge der in der elektromagnetischen Theorie des Lichtes gemachten Annahmen.

Betreffs der Frage, ob unsere Ergebnisse mit denjenigen übereinstimmen, die vom chemischen Gesichtspunkte zu erwarten waren, so scheint mir diese Übereinstimmung in der Tat eine sehr gute zu sein. Das einfachste optische Bild, das man sich von einem asymmetrischen Kohlenatom machen kann, ist ein Tetraeder mit vier isotropen Resonatoren in den Ecken. Wir haben gesehen, daß eine geometrisch asymmetrische Molekel dieser Art tatsächlich eine Drehung hervorruft. Der Umstand, daß die Drehung wesentlich von der *geometrischen* Asymmetrie der Molekel abhängt, steht in bester Übereinstimmung mit den neueren stereochemischen Ansichten, die bekanntlich ein asymmetrisches Kohlenatom nicht als ein reguläres Tetraeder auffassen.

Von großem Interesse scheint mir unser Ergebnis zu sein, daß die Drehung bei isotropen Resonatoren, wenigstens unter gewissen Umständen, *nur* von der geometrischen Asymmetrie der Molekel bedingt wird, so daß ein Umtausch der Resonatoren an sich die Drehung nicht beeinflusst.

Wir haben schließlich unsere Theorie mit derjenigen von Hrn. Stark zu vergleichen. Ich bemerke zunächst, daß man in den Ausführungen von Hrn. Stark jeden Hinweis auf die Bedeutung der Wechselwirkungen zwischen den Resonatoren in demselben Moleküle vermißt. Wenn ich Hrn. Stark recht verstehe, nimmt er ferner an, daß die vier Resonatoren, von denen die Drehung bedingt wird, *äolotrop* sind. In diesem Falle bedarf es aber, wie wir gesehen haben, keineswegs vier Resonatoren, um eine Drehung hervorzurufen. Zwei Resonatoren genügen hierzu. Unter diesen Umständen scheint mir die Starksche Theorie in ihrer jetzigen Fassung nicht mit den chemischen Tatsachen vereinbar zu sein.

Betreffs der Starkschen Theorie möchte ich mir noch eine Bemerkung gestatten. Die Tatsache, welche eine Theorie der Drehung der Polarisationssebene zu erklären hat, ist die, daß in einer optisch aktiven Flüssigkeit sich in einer beliebigen Richtung zwei zirkularpolarisierte Wellen mit verschiedenen Geschwindigkeiten fortpflanzen können. Ich sehe nicht ein, wie man mittels der von Hrn. Stark benutzten elementaren Hilfsmittel eine Erklärung dieser Tatsache erbringen soll.

Die prinzipielle Frage, die ich in dieser Abhandlung beantworten wollte, war die, ob man die natürliche Drehung der

Polarisationsebene in Kristallen und Flüssigkeiten qualitativ erklären kann, ohne die Annahmen der gewöhnlichen elektromagnetischen Theorie des Lichtes zu verlassen. Jetzt tritt die Frage in den Vordergrund, ob unsere quantitativen Resultate mit den Tatsachen übereinstimmen. Äußere Umstände machen es mir unmöglich, hier auf diese Frage einzugehen.

Uppsala, Juni 1915.

(Eingegangen 5. Juli 1915.)

## 2. *Über das Elementarquantum der Elektrizität und den photoelektrischen Effekt; von D. Konstantinowsky.*

(Bemerkungen zu den Abhandlungen der Herren E. Meyer und  
W. Gerlach.)

### § 1. Darlegung der Methode.

In dieser Zeitschrift habe ich eine Abhandlung über „Elektrische Ladungen und Brownsche Bewegung sehr kleiner Metallteilchen im Gase“<sup>1)</sup> veröffentlicht, in der einige Punkte nicht so ausführlich behandelt wurden, wie es gegenüber den inzwischen erschienenen Publikationen anderer Autoren<sup>2)</sup> wünschenswert gewesen wäre. Im folgenden soll demnach versucht werden, die betreffenden Punkte weiter auszuführen, wobei auf die ersten Abhandlungen entsprechend Bezug genommen wird.

Es wurden kleine Hg- und Au-Kügelchen in einem elektrischen Felde in einem Kondensator nach F. Ehrenhaft bewegt, mit einem Ra-Präparat umgeladen und auf diesem Wege deren Radien und Ladungen bestimmt; die so gemessenen Ladungen wurden mit der hypothetischen Elektronenladung verglichen. Bewegte sich ein solches *ultra-mikroskopisches Teilchen*<sup>3)</sup> im ausgeschalteten Kondensatorfelde, also bloß unter dem Einfluß der Schwere, so war, wenn  $m$  die Masse,  $a$  der Radius,  $s$  das spezifische Gewicht der Kugel,  $g$  die Schwerebeschleunigung,  $\mu$  der Reibungskoeffizient des umgebenden Mediums,  $l$  die mittlere freie Weglänge der Molekeln desselben,  $f$  eine Konstante ( $0 < f < 1$ ) ist, die Ge-

1) D. Konstantinowsky, Ann. d. Phys. 46. p. 261. 1915; Wiener Akad. Ber. 78. (IIa) p. 1697. 1914.

2) E. Meyer u. W. Gerlach, Ann. d. Phys. 45. p. 177. 1914 und 47. p. 227. 1915.

3) Als „ultramikroskopisch“ werden gemeinhin Größen bezeichnet, die an der Grenze der mikroskopischen Sichtbarkeit oder darunter liegen, also etwa unter der Lineardimension  $1 \cdot 10^{-5}$  cm Halbmesser.

schwindigkeit  $v$ , der Bewegung unter Zugrundelegung des Stokes-Cunninghamschen Gesetzes gegeben durch:

$$(1) \quad \frac{4}{3} a^3 \pi s g = 6 \pi \mu a v_f \cdot \frac{1}{1 + \frac{1,63 \frac{l}{a}}{f + 2(1-f)}}.$$

Wird ein homogenes elektrisches Feld von der Stärke  $\mathcal{E}$  der Wirkung der Schwere entgegen eingeschaltet, so wird die mit der Ladung  $e$  behaftete Metallkugel nach der Gleichung:

$$(2) \quad e \mathcal{E} - \frac{4}{3} a^3 \pi s g = 6 \pi \mu a v_e \cdot \frac{1}{1 + \frac{1,63 \frac{l}{a}}{f + 2(1-f)}}$$

bewegt;  $v_e$ , die diesmal erreichte Geschwindigkeit, ist positiv zu zählen, wenn sie der Richtung der Schwerkraft entgegengesetzt ist; demnach ist bei

$$(3) \quad e \mathcal{E}_1 > \frac{4}{3} a^3 \pi s g = m g \dots v_e' \text{ positiv}$$

bei

$$(4) \quad e \mathcal{E}_2 < \frac{4}{3} a^3 \pi s g = m g \dots v_e'' \text{ negativ.}$$

Ist die zwischen den Kondensatorplatten angelegte Spannung in Volt  $V$ , ihre Distanz in Zentimeter  $d$ , so ist

$$\mathcal{E} = \frac{V}{300 d} \text{ in e. st. E/cm,}$$

$e$  selbst ist durch die Ungleichung

$$(5) \quad \frac{m g}{\mathcal{E}_1} < e < \frac{m g}{\mathcal{E}_2}$$

eingengt, wenn zwei nahe aneinanderliegende Spannungen  $V_1$  und  $V_2$  konstatiert werden konnten, für welche  $v_e' > 0$  und  $v_e'' < 0$  ist.

Für verschiedene Ladungen des gleichen Teilchens konnte

$$(6) \quad \frac{m g}{\mathcal{E}_1^{(i)}} < e_i < \frac{m g}{\mathcal{E}_2^{(i)}}$$

und

$$\frac{m g}{\mathcal{E}_1^{(k)}} < e_k < \frac{m g}{\mathcal{E}_2^{(k)}}$$

gefunden werden.

1) E. Cunningham, Proc. Roy. Soc. 83 A. 357. 1910.



Wären die Ladungen  $e_i, e_k$  usw. aus der Elementarladung  $\varepsilon$  zusammengesetzt, so müßten sie als ganze Vielfache derselben aufgefunden werden:

$$(7) \quad \begin{cases} e_i = n_i \varepsilon \\ e_k = n_k \varepsilon \\ \vdots \\ \vdots \end{cases} \quad n_i, n_k \dots \text{ganze Zahlen.}$$

$\varepsilon$  ist demnach das gemeinschaftliche Maß der konstatierten Ladungen; da es sich aber um die Sicherstellung der kleinsten noch auffindbaren Ladungen handelt, wäre  $\varepsilon$  als *größtes* gemeinschaftliches Maß der Ladungen zu suchen.

Aus (6) und (7) ergibt sich für je zwei Ladungen die Ungleichung

$$(8) \quad \frac{V_2^{(k)}}{V_1^{(i)}} < \frac{n_i}{n_k} < \frac{V_1^{(k)}}{V_2^{(i)}}$$

Die Grenzen, zwischen welchen die Verhältnisse der zu suchenden *ganzen Zahlen*  $n_i/n_k$  liegen, sind von jedem Gesetze der Bewegung im widerstehenden Mittel unabhängig, denn die erreichten Geschwindigkeiten  $v_s$  sind in der Ungleichung (8) nicht enthalten. Aus (7) ergibt sich, daß  $\varepsilon$  um so kleiner wird, je größer die  $n$  gefunden werden; für  $n_i, n_k$  gibt es nun unendlich viele Zahlengruppen, die den Ungleichungen (8) genügen, doch *gibt es unter diesen Gruppen nur eine solche von kleinsten ganzen Zahlen*, welche dieselben befriedigt. Der physikalische Sinn ist der folgende: *Man kann sich die Ladungen  $e$  auf verschiedene Weise aus „elementaren“ Quanten  $\varepsilon$  zusammengesetzt denken; doch wird es bei der Anzahl und Genauigkeit der durchgeführten Versuche nur eine größte Ladung  $\varepsilon$  (den kleinsten ganzen Zahlen  $n$  entsprechend) geben, aus der die betrachteten Ladungen  $e$  aufgebaut sein können.* Jede größere Ladung  $\varepsilon'$ , als Elementarladung angenommen, würde den Ergebnissen der Versuche widersprechen. Aus einer solchen Reihe von Experimenten bleibt demnach die Existenzmöglichkeit von Ladungen, welche kleiner als dieses größte  $\varepsilon$  sind, offen; es muß aber mit zwingender Notwendigkeit ein positiver Schluß dahin gezogen werden, daß ein eventuelles elementares Quant nicht oberhalb der jeweils erschlossenen Ladung  $\varepsilon$  liegen kann. Rechnet man nun das Gewicht  $mg$  des Teilchens nach einer der drei Methoden — Widerstandsgesetz von Cunningham, Farbe des diffus zerstreuten Lichtes, Brownsche Bewegung — so kann man nach (5) die Ladung  $e$  bestimmen.

Das ist die Methode, nach der F. Ehrenhaft und nach ihm der Autor gearbeitet haben.

## § 2. Kritik der „Schwebungen“.

Würde  $v_e$  in Gleichung (2), wie dies z. B. von A. Joffé und E. Meyer u. W. Gerlach durchgeführt wurde<sup>1)</sup>, experimentell so bestimmt werden, daß  $v_e = 0$  oder  $\sim 0$  (nahezu gleich 0) ist, d. i. wenn das beobachtete Partikel „schwebt“, so ergäben sich statt der Ungleichungen (8) entsprechend die Gleichungen

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{und} \quad e_i \mathcal{E}_i \sim m g \\ \frac{V^{(k)}}{V^{(i)}} \sim \frac{n_i}{n_k}, \end{array} \right.$$

wobei  $V^{(i)}$  und  $V^{(k)}$  die den Ladungen  $e_i$  und  $e_k$  entsprechenden Spannungen während des „Schwebens“ sind. Nun haften aber den beobachteten Spannungen  $V^{(i)}$  und  $V^{(k)}$  Versuchsfehler an; das Verhältnis  $n_i/n_k$  ist nur annähernd dem von  $V^{(k)}/V^{(i)} = \beta$  gleich; tatsächlich ist  $n_i/n_k \neq \beta$ .

Für die Bestimmung von  $n_i/n_k$  aus  $\beta$  ist daher kein weiterer Anhaltspunkt gegeben als der, daß dieses Verhältnis „in der Nähe“<sup>2)</sup> von  $\beta$  sein muß, ohne daß es möglich wäre, diesen unbestimmten Begriff objektiv exakter zu fassen. Damit ist aber in die Bestimmung der  $n$  große Willkür getragen; denn in der Nähe jeder Zahl  $\beta$  gibt es immer ein Verhältnis relativ kleiner ganzer Zahlen. Diese können dann, insbesondere wo es sich um die Messung von Elektrizitätsmengen handelt, die dem „Elektron“ von  $4,8 \cdot 10^{-10}$  e. st. E. gegenüber groß sind, meist so klein genommen werden, daß eine stichhaltige und objektive Kritik der Atomistik der Elektrizität nicht erreicht wird; denn der Willkür in der Wahl der Kleinheit der  $n$  ist zu großer Spielraum geboten, und damit kann das zu bestimmende  $\epsilon$  nicht objektiv nach oben abgegrenzt werden. Ein positiver Schluß über die mindeste Kleinheit des Elementarquantums, also nach der einen Seite hin, ist für diese Art der Beobachtung kaum möglich. Eine analoge Schlußweise gilt natürlich auch für die Differenzen von Ladungen.

1) A. Joffé, Sitzungsber. d. bayer. Akad. p. 19. 1913. — E. Meyer u. W. Gerlach, Ann. d. Phys. 45. p. 177. 1914.

2) E. Meyer u. W. Gerlach l. c.

Ein numerisches Beispiel aus der zitierten Arbeit von E. Meyer und W. Gerlach wird die vorliegenden Verhältnisse am besten aufklären; als Beispiel nehmen wir Pt Nr. 579 (Tab. 6, l. c. p. 192), da Pt das *einzige Beobachtungsmaterial* bei E. Meyer und W. Gerlach ist, an dem möglicherweise, wie später ausgeführt werden soll, eine derartige Absolutbestimmung der Größenverhältnisse vorgenommen werden darf. Wir nehmen ferner zunächst beispielsweise an, daß von den vorgenommenen 24 Messungen bloß die erste und letzte glücklich wären, also

$$\mathcal{E}_1 = \frac{1167}{300 \cdot 1,55} \text{ e. st. E./cm}$$

$$\mathcal{E}_2 = \frac{922}{300 \cdot 1,55} \text{ e. st. E./cm}$$

und

$$\frac{n_1}{n_2} \sim \frac{V_2}{V_1} = \beta = 0,790.$$

Es würde sich für  $n_1/n_2$  sowohl

$$\frac{83}{105} = 0,790,$$

als auch mit etwas ungenauer angesehenem  $\beta$

$$\frac{4}{5} = 0,80$$

ergeben.

Wie wichtig nun aber die Entscheidung ist, ob das tatsächlich richtige Verhältnis  $n_1/n_2$  nur 83/105 bzw. ein von größeren Zahlen gebildetes ist oder nicht, ergibt die Auswertung der den betreffenden Verhältniszahlen entsprechenden „Elementarladungen“  $\varepsilon$ . Das Verhältnis 83/105 würde den Gleichungen (9) und (7) entsprechend

$$\varepsilon' = \frac{mg}{n_1 \mathcal{E}_1} = \frac{10,18 \cdot 10^{-8}}{2,508 \cdot 83} = 4,88 \cdot 10^{-10} \text{ e. st. E.},$$

also ein „Elektron“ ergeben; das Zahlenpaar 4/5 ergäbe

$$\varepsilon'' = 101 \cdot 10^{-10} \text{ e. st. E.}$$

Lägen tatsächlich bloß diese beiden Beobachtungen vor, so würde man jedenfalls 4/5 als das kleinste „in der Nähe“ gelegene ganzzahlige Verhältnis für das richtige angesehen haben; das so erhaltene Resultat wäre mit einem Elektrizitätsatom um  $4,8 \cdot 10^{-10}$  e. st. E. vereinbar. Nun liegen aber gerade in

dieser Versuchsreihe noch 22 andere Beobachtungen vor, welche einen derartigen Schluß nicht zulassen und die beiden Beobachter zur *Annahme des Mindestverhältnisses*  $\frac{225}{284}$  zwingen, oder, als notwendige Folge dieses Schlusses, zu einer Mindestladung

$$\epsilon''' = 1,80 \cdot 10^{-10} \text{ e. st. E.}$$

Ein einziges Beobachtungspaar nach F. Ehrenhaft, an genügend kleinen Teilchen mit entsprechend engen Grenzen der Steig- und Fallspannungen, hätte die mühsame Bestimmung von 24 verschiedenen Ladungen ersetzt und die überdies aus allen einschlägigen Arbeiten (F. Ehrenhaft, Millikan-Zerner, A. Mayer, E. Regener, E. Weiß, M. Vogl, D. Konstantinowsky usw.) hervorgehende Unhaltbarkeit der Annahme eines unteilbaren Elektrons um  $4,8 \cdot 10^{-10}$  e. st. E. ergeben; auch nach dem erwähnten Experimente E. Meyers und W. Gerlachs allein wäre ein „Elektron“, welches größer als  $1,80 \cdot 10^{-10}$  e. st. E. ist, nicht denkbar. Es muß daher, wenn eine Übertragung der Elektrizität nach Atomen überhaupt erfolgen kann, sich dieses Atom unterhalb der Größenordnung von etwa  $1,8 \cdot 10^{-10}$  e. st. E., d. i. unter etwa ein Drittel der bisher als unteilbar angenommenen Größe der „Elektronen“ befinden, so daß, auch wenn nur aus den besprochenen Abhandlungen dieser Autoren geschlossen würde, nunmehr keineswegs „mit einiger Sicherheit“ angenommen werden kann, „daß durch den photoelektrischen Effekt . . . Elektronen abgespalten werden“, wie die genannten Autoren schließen.

Daß es aber naheliegend ist, an einer Atomistik der Elektrizität in der erhaltenen Größenordnung überhaupt zu zweifeln, ergibt sich daraus, daß bisher noch jede genauere und verfeinerte Bestimmung (wie in dem angeführten Beispiel zu den 2 Beobachtungen die 22 anderen) dazu gezwungen hat, die obere Grenze der Existenzmöglichkeit eines Elektrizitäts-atomes herunterzudrücken.

Man kann den Standpunkt der beiden von F. Ehrenhaft und Joffé-Meyer-Gerlach betretenen Wege folgendermaßen klarlegen. Im ersten Falle ist der experimentelle Fehler, der allen physikalischen Beobachtungen anhaftet, durch die Wahl von Ungleichungen an Stelle von Gleichungen ausgeschaltet,

im zweiten Falle aber in den Gleichungen enthalten, ohne daß es möglich wäre, seine Größe irgendwie näher zu bestimmen. Es ist daher notwendig, zu jeder Ladung (Zahl  $n$ ) zwei Grenzen anzugeben, welche den experimentellen Fehler nicht mehr enthalten, daher zur objektiven Eingrenzung der richtigen Zahl dienen können. Die Möglichkeit der exakten Bestimmung von „elementaren“ Elektrizitätsmengen an Größenverhältnissen, wie sie in der besprochenen Arbeit vorliegen, soll später erörtert werden.

### § 3. Bestimmung ultramikroskopischer Größenordnungen.

Bis zum Zeitpunkt des Erscheinens der Arbeit F. Ehrenharts über die Größenbestimmung ultramikroskopischer Metallteilchen<sup>1)</sup> aus optischen Beobachtungen waren für die Bestimmung der Massen  $m$  (oder des Radius  $a$ ) der Teilchen zwei Methoden herangezogen worden.

Die eine, welche auf Grund der mittleren Bewegungsgeschwindigkeiten  $v$ , und  $v_s$  im Schwerfeld und im angeschalteten Kondensatorfeld die Radien  $a$  und die Ladungen  $e$  der Kugeln nach den Bewegungsgesetzen (1) und (2) von Stokes-Cunningham ermittelt, zeigt im mikroskopischen Gebiete gute Übereinstimmung, wie die zu diesem Behufe ausgeführten Experimente von Mc Keehan, Knudsen-Weber usw.<sup>2)</sup> beweisen. Nun wurde von J. Perrin<sup>3)</sup> die Vermutung ausgesprochen, daß das im elektrischen Flammenbogen verdampfte und nachher wieder erstarrte Elektrodenmaterial von Au, Ag, Pt, das von F. Ehrenhaft und später vom Autor benutzt wurde, nicht Kugelgestalt hätte und nicht die Dichte der betreffenden Metalle aufweise. Durch die subjektiven mikroskopischen Untersuchungen F. Ehrenharts<sup>4)</sup> sowie C. Doelters und H. Siedentopfs war diesen Hypothesen schon vor ihrem Auftauchen der Boden entzogen worden; die neuerdings publi-

1) F. Ehrenhaft, Wiener Akad. Ber. 112. (IIa) p. 204. 1903 im Mittelwerte und sodann am Einzelteilchen Physik. Zeitschr. 15. p. 952. 1914; 16. p. 227. 1915.

2) Mc Keehan, Physik. Zeitschr. 12. p. 707—721. 1911; Knudsen-Weber, Ann. d. Phys. 36. p. 981. 1911.

3) J. Perrin, Compt. rend. 152. p. 1166; an diese Hypothesen lehnten sich andere Autoren in ihren Schlußfolgerungen an.

4) F. Ehrenhaft, Wiener Akad. Ber. 119. (IIa) p. 830. 1910.

zierten Mikrophotographien F. Ehrenhafts<sup>1)</sup> und namentlich die in letzter Zeit durchgeführten elektromagnetischen Untersuchungen des genannten Forschers lassen in objektiver Darstellung erkennen, daß für derartige Einwände gegen die Zulässigkeit der Widerstandsgesetze keine Berechtigung vorliegt, *soweit es sich um das Elektrodenmaterial von Edelmetallen und Hg in inerten Gasen handelt.*<sup>2)</sup> Hingegen liefert Cu, wie es E. Meyer und W. Gerlach verwenden, das in einer sauerstoffhaltigen Atmosphäre oxydiert, ein Verbrennungsprodukt, das nicht mehr sicher die Kugelgestalt und Dichte des Metalles aufweist. *Es ist daher entweder eine Untersuchung über die Art der Veränderung von Cu-Elektrodenmaterial, das im Flammenbogen in O-haltiger Atmosphäre zerstäubt wird, notwendig, oder es muß, wenn dies nicht durchgeführt oder nicht durchführbar ist, von der Verwendung eines solchen Materials für die Bestimmungen von Massen (Ladungen) abgesehen werden.* Demnach konnten die Resultate von E. Meyer-W. Gerlach nur insoweit berücksichtigt werden, als sie an einwandfreiem Material — wie dies wahrscheinlich Pt darstellt — erzielt wurden. Alle anderen Beobachtungen sind zur Bestimmung von Absolutwerten der Größe und getragenen Ladung der Partikelchen unbrauchbar (vgl. Brownsche Bewegung).

Überdies kommen E. Meyer und W. Gerlach gleichfalls, jedoch auf nicht einwandfreiem Wege<sup>3)</sup>, zu dem Schlusse, daß „das Stokessche Gesetz mit den früher verwendeten Korrekturen bei den von ihnen beobachteten Metallpartikelchen vollkommen ungültig“ und daß „die Dichte der Teilchen ganz wesentlich anders als die Dichte des verwendeten Elektrodenmaterials“ sei. Für die Messungen F. Ehrenhafts — und damit auch für die meinen — geben die Autoren selbst zu, daß „diese Fehlerquelle durch die Untersuchungen F. Ehrenhafts in einer Kohlensäureatmosphäre wenig wahrscheinlich wird“ und daß er in der letzten Untersuchung „mit sicher runden Hg-Tröpfchen von dem richtigen spezifischen Gewicht arbeitet“. Aus den an Cu angestellten Untersuchungen der genannten Autoren läßt sich also „die Frage nach der absoluten Größe der kleinsten Ladungsänderung“ nicht ent-

1) F. Ehrenhaft, Wiener Akad. Ber. 123. (IIa) p. 89. 1914.

2) Vgl. überdies neuerdings R. Gans, Ann. d. Phys. 47. p. 270. 1915.

3) Vgl. p. 74.

scheiden. Die Untersuchungen an Pt aber ergeben, wie später gezeigt werden wird, keine sicheren Resultate, bis auf das eine, daß die Ladungen, deren Bestimmung vorgenommen wird, weit unter dem „Elektron“ liegen.

#### § 4. Die Brownsche Bewegung.

Die zweite Methode der Berechnung von Masse und getragener Ladung aus der an ultramikroskopischen Teilchen beobachteten Brownschen Bewegung setzt wohl nicht die Kenntnis von Form und Dichte der beobachteten Partikeln voraus, gibt aber zu große Resultate; denn es hat neuerdings F. Ehrenhaft<sup>1)</sup> eine Methode klargelegt, die von den bisherigen unabhängig ist. Bei Kenntnis der optischen Konstanten des verwendeten Materials ergibt die Methode aus der beobachtbaren Farbe des durch das senkrecht abgelenkte Licht im Mikroskop zur Beobachtung gelangenden Teilchens die Größe desselben. Diese, auf rein optischer Grundlage beruhende Methode, welche gleichsam die mikroskopische Messung in dem Gebiete fortzusetzen gestattet, wo nach der Lehre von Helmholtz und Abbe eine direkte Ausmessung nicht mehr möglich ist, zeigt bei meinen Beobachtungen so gute Übereinstimmung mit den Resultaten aus dem Widerstandsgesetze von Cunningham, wenn in diesem  $f = 0$ <sup>2)</sup> genommen wird, als dies für Messungen an Partikeln von den Dimensionen bis zum 10. Teile der Wellenlänge des Lichtes überhaupt erwartet werden kann.

Aus den oben erwähnten Versuchen errechnete ich verschiedene Ladungen und Radien der Gold- und Quecksilberteilchen, je nach dem angewandten Widerstandsgesetze; nach den nunmehr durch die optischen Rechnungen geklärten Verhältnissen müssen demnach die Zahlen bei Tab. 1 als die zutreffenden angesehen werden.<sup>3)</sup>

*Die kleinste Ladung, deren Existenz in der Natur sich in meinen Versuchen noch sicher nachweisen läßt, ist*

$$\epsilon = 9 \cdot 10^{-12} \text{ e. st. E.},$$

1) F. Ehrenhaft, Physik. Zeitschr. 15. p. 952. 1914; 16. p. 227. 1915.

2) Vgl. die erwähnten Versuche Mc Keehans, die gleichfalls, allerdings im mikroskopischen Gebiet, die Konstante ungefähr  $f = 0$  erweisen.

3) D. Konstantinowsky, Ann. d. Phys. 46. p. 292. 1915.



d. i. etwa der 50. Teil des bisher unteilbar angenommenen Elektrons. Als weiteres Resultat ergibt sich aus den vorerwähnten Tatsachen, daß aus den Resultaten der Brownschen Bewegung kein Schluß über die Gültigkeit der Widerstandsgesetze gezogen werden darf.

Tabelle 1.

Part. Nr.	Rad. $\alpha \cdot 10^6$	Ladung $e \cdot 10^{10}$ e. st. E.	Part. Nr.	Rad. $\alpha \cdot 10^6$	Ladung $e \cdot 10^{10}$ e. st. E.
Au I	4,6	0,09	Au IX	3,3	0,58
„ II	3,7	0,07	„ X	3,6	—
„ III	9,3	0,73	„ XI	3,8	1,0
„ IV	6,6	0,14	„ XII	6,9	2,1
„ V	8,7	0,29	„ a	3,9	0,06
„ VI	3,9	0,26	Hg I	9,0	1,6
„ VII	11	0,09	„ II	3,6	0,2
„ VIII	6,3	0,22			

#### § 5. Die Bedeutung des Zeitmeßfehlers für die Brownsche Bewegung.

Ist  $v_w$  die (gedachte) Geschwindigkeit der reinen Steig- oder Fallbewegung des Partikels, d. h. ohne Störung durch die Brownsche Bewegung,  $t_i$  die tatsächlich, also mit der Störung gemessene Passierzeit über eine bestimmte Strecke  $l$ ,  $t_w$  die über die gleiche Strecke (gedachte) Passierzeit ohne Störung, demnach  $v_w = l/t_w$ , so ist<sup>1)</sup>

$$(10) \quad \overline{\lambda_y^2} = \frac{v_w^2}{n} \sum_1^n \frac{(t_i - t_w)^2}{t_i^2}$$

das mittlere sekundliche Verschiebungsquadrat des Teilchens.

Den gemessenen Zeiten  $t_i$  haften kleine Stopffehler an, die nicht mit den Meßfehlern der sogenannten „persönlichen Gleichung“ zu verwechseln sind, sondern, da Ein- und Austritt beobachtet wird, sind sie wesentlich kleiner als diese. Wäre  $\delta_1$  die von der Brownschen Bewegung herrührende Abweichung,  $\delta_2$  der Tasterfehler, so ist

$$(11) \quad t_i - t_w = \delta_1^{(i)} + \delta_2^{(i)},$$

1) E. Weiß, Wien. Akad. Ber. 120. p. 1021. 1911.



oder nach (10)

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} \overline{\lambda_g^2} &= \frac{v_w^2}{n} \sum_1^n \frac{(\delta_1(i) + \delta_2(i))^2}{t_i} = \frac{v_w^2}{n} \sum_1^n \frac{\delta_1(i)^2}{t_i} \\ &+ \frac{v_w^2}{n} \sum_1^n \frac{\delta_2(i)^2}{t_i} + 2 \frac{v_w^2}{n} \sum_1^n \frac{\delta_1(i) \cdot \delta_2(i)}{t_i} = \overline{\lambda_w^2} + \overline{\lambda_f^2}. \end{aligned} \right.$$

Da sowohl die Abweichungen der Brownschen Bewegung als auch die des Tasterfehlers zufällig und voneinander unabhängig verteilt sind, fällt die Summe der Doppelprodukte weg und es bleibt, wenn  $\overline{\lambda_w^2}$  die wahre Brownsche Bewegungskomponente darstellt, das Korrektionsglied  $\overline{\lambda_f^2}$  schätzungsweise

$$(13) \quad \overline{\lambda_f^2} = \frac{v_w^2}{n} \sum_1^n \frac{\delta_2(i)^2}{t_i} \sim \frac{v_w^2}{t_w} \cdot \frac{1}{n} \sum_1^n \delta_2(i)^2.$$

Die Korrekturgleichung lautet also:

$$(14) \quad \overline{\lambda_w^2} = \overline{\lambda_g^2} - \frac{v_w^2}{t_w} \cdot \frac{1}{n} \cdot \sum_1^n \delta_2(i)^2.$$

Um den Faktor

$$\overline{\delta_2^2} = \frac{1}{n} \sum_1^n \delta_2(i)^2$$

des Korrektionsgliedes zu messen, wurden von mir an einem Kymographion die Zeitmeßfehler bestimmt.<sup>1)</sup>

In das Rußband *B* eines Kymographions wurde ein weißer Punkt *P* eingeritzt, welcher das beobachtete Kügelchen darstellen soll; der Ein- und Austritt dieses Punktes an zwei grauen scharfrandigen Marken *M*<sub>1</sub> und *M*<sub>2</sub> wird am Beobachtungsregistrator *R* durch einen Morsekontakt festgehalten. Auf diese Weise ist es nicht nur möglich, die Geschwindigkeit

1) Dieses Kymographion ist bei dem Universitätsmechaniker L. Castagna am Physiologischen Institut der k. k. Universität Wien konstruiert worden. Herr Dr. L. Richtera hat die für diese spezielle Untersuchung sehr zweckmäßige Anordnung angegeben und mich in der Ausführung der Versuche in liebenswürdigster Weise unterstützt.

der Rotationsbewegung von  $B$  und damit der Bewegung von  $P$  zu regulieren, sondern es ist auch die Registrierung der Passierzeiten von eventuellen Geschwindigkeitsänderungen der Rotation des Rußbandes unabhängig. Zur Fixierung der absoluten Zeit schreibt eine Stimmgabel  $S$   $\frac{1}{20}$  Sekunden auf das Rußband.

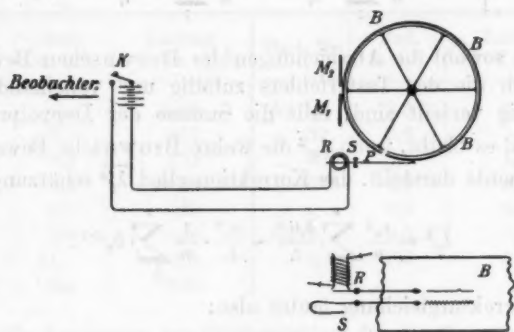


Fig. 1.

Das Resultat einer solchen Versuchsreihe wurde durch die Photographie eines Rußbandes in Ann. d. Phys. **46**. p. 281. 1915 publiziert. Es ergibt sich

$$\overline{\delta_g^2} = 0,0011 \text{ sec}^2.$$

Vergleicht man nun das aus diesem Werte für  $\overline{\delta_2^2}$  sich ergebende  $\overline{\lambda_g^2}$  in jedem Falle mit dem  $\overline{\lambda_g^2}$ , so zeigt sich, daß  $\overline{\lambda_g^2}$  meist nur einige Prozente von  $\overline{\lambda_g^2}$  ausmacht und niemals größer als 10 Proz. von  $\overline{\lambda_g^2}$  ist.

Bei den Messungen F. Ehrenhafts sowie bei den meisten meiner Messungen ist eine derartige Korrektur überhaupt bedeutungslos; bei einigen meiner Messungen, wo sie anzu- bringen war, beeinflußt sie das Resultat, wie erwähnt, nicht wesentlich.

Bei den Beobachtungen von E. Meyer und W. Gerlach aber zeigt es sich, daß, selbst wenn man den aus den Messungen dieser Autoren stammenden Wert von

$$\left(\frac{\delta_x^2}{t}\right) = 0,00049$$

zugrunde legt, der als „Korrektur“ eingehende Fehler  $\lambda^2$  voraussichtlich 180mal so groß ist als das gesuchte Resultat.

Auf der Grundlage von Resultaten aus Messungen bei welchen der Experimentalfehler die gesuchte Größe mehr als 180mal überwuchert, kann gar kein Schluß gezogen werden, es sei denn der, daß mit einer solchen Apparatur, wie sie möglicherweise für Beobachtungen im mittleren mikroskopischen Gebiete (also  $10^{-4}$  cm) geeignet wäre, keine Messungen typisch submikroskopischer Erscheinungen vorgenommen werden können. Es gestattet auch die geringe Apertur der Fernrohanordnung E. Meyers und W. Gerlachs bloß Messungen an Teilchen, die der ultramikroskopischen Größenordnung gegenüber groß sind; daher tritt eine Erscheinung wie die Brownsche Bewegung an ihnen so schwach auf, „daß es“, wie die Autoren selbst bemerken, „nicht möglich ist, die Brownsche Bewegung der Teilchen quantitativ zu messen“. Da nun aber so große Teilchen relativ rasch fallen, d. h. die beobachtbaren Strecken in kleinen Zeiten durchmessen, müssen diesen beobachteten Fallzeiten immerhin merkliche Versuchsfehler anhaften.

Bei der Anordnung, wie sie E. Meyer und W. Gerlach benutzen, ist daher wegen der außerordentlichen Kürze der Fallzeiten für so große Partikel der Zeitmeßfehler 180mal größer als die aus der Brownschen Bewegung zu erwartenden Zeitschwankungen.

Wollten E. Meyer und W. Gerlach sich etwa der Aufgabe unterziehen, Brownsche Bewegung auch so großer Metallteilchen zu messen, dann müßten die aus der Brownschen Bewegung resultierenden Zeitschwankungen durch Verlängerung der Zeit, über welche beobachtet wird, vergrößert werden; denn durch eine solche Verlängerung würde der Zeitmeßfehler, wenn er sich überhaupt ändert, jedenfalls nur kleiner werden, die Zeitschwankungen der Brownschen Bewegung werden aber vergrößert, so daß sie dem Meßfehler gegenüber nicht nur konstatierbar, sondern sogar so groß gemacht werden könnten, daß die Brownsche Bewegung an ihnen errechnet werden kann. Eine solche Vergrößerung wäre durch eine entsprechende Verlängerung der beobachteten Fallstrecke ein-

wandfrei durchführbar. Eine überschlagsweise Rechnung würde aber eine rund 2000mal größere Fallstrecke, d. i. bei Pt Nr. 579 eine Strecke von 8 m verlangen, damit der zu erwartende Tasterfehler höchstens 10 Proz. der zu erwartenden Brownschen Bewegung betrage.

Ein Vergleich von zwei Messungen, von welchen die eine im mikroskopischen, die andere im ultramikroskopischen Gebiete durchgeführt wurde, erweist den wesentlichen Unterschied.

I. E. Meyer und W. Gerlach Pt Nr. 579.

Fallzeiten: 1,86, 1,42, 1,42, 1,42, 1,35, 1,42, 1,41, 1,38, 1,42, 1,43, 1,40 Sekunden.

GröÙte Abweichung vom Mittel: 0,05 Sekunden.

I. D. Konstantinowsky Hg Nr. II.

Fallzeiten: 2,9, 5,2, 14,9, 9,0 4,3, 15,2, 10,8, 13,0, 8,1, 8,6, 38,3 .... 2,0 .... 17,0 Sekunden.

GröÙte Abweichung vom Mittel 25,9 Sekunden.

Die größte Abweichung im ersten Falle ist daher von der Größenordnung eines Meßfehlers und, wenn nicht gänzlich, so doch weitaus zum größten Teile ein solcher; im zweiten Falle ist die Abweichung mindestens 300mal so groß als der Stoppfehler, und daher kommt auch der letztere der Brownschen Bewegung gegenüber nicht in Betracht: in den von mir beobachteten Abweichungen wird also reine Brownsche Bewegung gemessen, während E. Meyer und W. Gerlach bloß Beobachtungsfehler registrieren. Es ergibt sich demnach aus den Messungen E. Meyers und W. Gerlachs gar kein Anhaltspunkt für die Brownsche Bewegung der von ihnen beobachteten Teilchen, sondern bloß ein Beweis für die viel zu geringe Genauigkeit ihrer Beobachtungsanordnung als Meßinstrument ultramikroskopischer Erscheinungen. Es wäre verfehlt, mit E. Meyer und W. Gerlach die beobachteten Meßfehler als Brownsche Bewegung in Rechnung zu ziehen und aus diesen Meßfehlern Schlüsse über Größenordnungen ziehen zu wollen. Insbesondere darf auch aus dem Umstande, daß der auf ein Elektron  $= 4,8 \cdot 10^{-10}$  e. st. E. führende Wert des  $\bar{\lambda}^2$  in die erwähnten enormen Fehlergrenzen fällt, gar kein

Schluß über die Möglichkeit oder Unmöglichkeit eines Elektrons in der angegebenen Größenordnung gezogen werden.<sup>1)</sup>

§ 6. Folgerungen aus dem experimentellen Fehler bei Bestimmung der Haltepotentiale (Schwebungen).

Der gleiche wesentliche Nachteil der Beobachtungsmethode mit dieser Anordnung zeigt sich bei den angegebenen Messungen an Platin auch in anderer Weise. Die experimentellen Fehler, die bei der Bestimmung der *Haltepotentiale*, das sind die Spannungen, bei welchen die Partikeln „schweben“, unvermeidlich sind, erscheinen von der Größenordnung der Differenzen in den Haltepotentialen, die ein halbes Elektron um  $4 \cdot 10^{-10}$  e. st. E. ergeben können.

Es sind also auch hier wieder die Fehler von der Größenordnung des gesuchten Resultates; der Grund ist wieder in der für derartig subtile Bestimmungen nicht passend gewählten Anordnung zu suchen.

In Pt Nr. 576, Tab. 8, l. c., erscheinen drei Beobachtungen angeführt, welche die Haltepotentiale 1042, 1046 und 1049 Volt ergeben; nimmt man die allerdings für eine andere Beobachtungsserie angegebene Genauigkeit von 0,5 Proz. für die erwähnte Pt-Messung an, so können die drei Spannungen als zu der gleichen Ladung gehörig angesehen werden.

Nach Gleichung (9) ist

$$(15) \quad \begin{cases} e_1 = \frac{mg \cdot 300 d}{V_1} \\ e_2 = \frac{mg \cdot 300 d}{V_2} \end{cases}$$

und daher

$$e_2 - e_1 = mg \cdot 300 d \cdot \frac{V_1 - V_2}{V_1 V_2}.$$

---

1) Es ist ferner (l. c. p. 196) unrichtig, daß die Ergebnisse von E. Meyer und W. Gerlach aus der Brownschen Bewegung mit denen von E. Weiß übereinstimmen, weil bei Weiß die Beweglichkeit aus der Brownschen Bewegung kleiner ist als diejenige, welche die Widerstandsgesetze ergeben, während infolge des enormen Meßfehlers bei E. Meyer und W. Gerlach gerade das Umgekehrte der Fall ist.

Bei 5 Promille Fehler kann man die Abweichung, die vom Fehler herrührt, mit

$$\begin{aligned} e_2 - e_1 &= m g \cdot 300 d \cdot \frac{V_1 - V_2}{V_1} \cdot \frac{1}{V_2} \\ &= m g \cdot 300 d \cdot \frac{5}{1000} \cdot \frac{1}{V_2} \end{aligned}$$

in Rechnung setzen:

$$e_2 - e_1 = 1,17 \cdot 10^{-10} \text{ e. st. E.}$$

Weichen aber die Werte  $V_1$  und  $V_2$  durch ihren Fehler nach der entgegengesetzten Seite von ihrem wahren Werte ab, so ist

$$(e_2 - e_1)' = 2,34 \cdot 10^{-10} \text{ e. st. E.,}$$

somit die bloß vom „Beobachtungsfehler“ herrührende „Ladungsdifferenz“ bereits von der Größenordnung des halben „Elektrons“.

Um davon noch ein Beispiel zu geben, sei folgende Berechnung an Pt Nr. 579 (Tabb. 6 u. 7) und vergleichsweise Cu 206 durchgeführt.

Mißt man die Differenzen zweier aufeinanderfolgender Ladungen von Elektrizitätsmengen in mg-Einheiten, so ist

$$\delta_1 = (e_2 - e_1)_{\text{mg}} = 300 d \cdot \frac{V_1 - V_2}{V_1 V_2};$$

diese Ladungsdifferenzen müssen nun, wofern die Elektrizität atomistisch ist, gleichfalls aus den Quanten des Elektrizitätsatoms zusammengesetzt sein; während aber, durch die relativ große Kapazität der Teilchen als Konduktoren, die E. Meyer und W. Gerlach beobachteten, die Ladungen selbst von den Beobachtern als sehr hohe — zwischen 30- und 280fache — Vielfache des Atomes angesehen wurden, erblickten sie in den Differenzen der Ladungen sehr niedrige Vielfache des Atomes, so daß sich eine bessere Kritik der Atomistik von ihnen erwarten ließe. In Tab. 2 stellt  $\delta_i$  die Differenz  $e_{i+1} - e_i$  in mg-Einheiten,  $p$  die von den Autoren E. Meyer und W. Gerlach angenommene, jedoch nicht zwingende Vielfachheit derselben,  $\varepsilon$  die daraus folgende „ele-

mentare Elektrizitätsmenge“ (gleichfalls in mg-Einheiten),  $a$  die Abweichungen der einzelnen Ladungen vom  $p$ -fachen der mittleren elementaren Ladung in Prozenten dieser Ladung dar. Die Resultate an Cu dürfen für derartige Überlegungen verwendet werden, solange keine Absolutwertsbestimmungen vorgenommen werden.

Tabelle 2.

Pt Nr. 579.			Cu Nr. 206.		
$\delta_i \cdot 10^3$	$p_i$	$\alpha$	$\delta_i \cdot 10^3$	$p_i$	$\alpha$
6,95	4	-4	4,280	2	7
6,83	4	-6	4,505	2	12
8,58	5	-5	1,359	1	32*
4,230	2	+16	4,025	2	0
1,950	1	+7	5,719	3	5
6,77	4	-7	10,42	5	4
2,034	1	+12	6,870	3	14
1,642	1	-10			
1,239	1	-32 <sup>1</sup>			
4,175	2	+15			
3,400	2	-6			
5,196	3	-5			
3,532	2	-3			
5,411	3	-1			
3,677	2	+1			
4,203	2	+16			
2,368	1	+30 <sup>1</sup>			
5,793	3	+6			
8,950	5	-2			
6,680	4	-8			
2,618	2	-28 <sup>1</sup>			
4,245	2	+17			
5,413	3	-0			

Wie man sieht, ergibt sich keineswegs gute Konstanz eines elementaren Quants, wie die Autoren behaupten, um so eher, wenn man bedenkt, daß der mit \* bezeichnete Wert von Cu 206, der um 32 Proz. vom Mittelwerte abweicht, von den beiden Beobachtern selbst als „mit einem zufällig größeren

Fehler behaftet“ bezeichnet wird, während die drei Beobachtungen<sup>1</sup> von Pt 579 gleichfalls Abweichungen von 28—32 Proz. zeigen. Dies liegt zum Teil daran, daß die ermittelten Zahlen  $p$  noch keineswegs richtig, auf jeden Fall aber, der Genauigkeit entsprechend, nicht groß genug sind, d. h. die Unterschreitung von Pt 579 mit zirka ein Drittel des Elementarquantums bei  $4,8 \cdot 10^{-10}$  e. st. E., die die Autoren selbst angeben, noch als viel zu wenig weitgehend angenommen wurde.

Andererseits sind die großen mittleren Abweichungen der einzelnen Werte vom Mittelwerte in der Unzulänglichkeit der Beobachtungsmethode begründet. Es können eben, wie



schon oben erwähnt, typisch ultramikroskopische Erscheinungen mit Exaktheit nur an ultramikroskopischen Größen beobachtet werden, während die von den Herren E. Meyer und W. Gerlach angewandte Optik eine Beobachtung derartiger Teilchen nicht zuläßt.<sup>1)</sup>

Aus den dargelegten Messungen ist ersichtlich, daß E. Meyer und W. Gerlach keineswegs berechtigt sind zu behaupten, „daß die Ladungsänderungen bei ein und demselben Teilchen immer gut konstant sind“, sondern daß vielmehr nach ihren Messungen auf eine Atomistik der Elektrizität *nicht geschlossen werden darf*, noch weniger aber auf Grund solcher Resultate ein indirekter Schluß auf die Ungültigkeit der Widerstandsgesetze gemacht werden darf. Vor kurzem ist nun eine neue Arbeit von E. Meyer und W. Gerlach<sup>2)</sup> erschienen, in der die beiden Autoren die Umladung von Teilchen beim photoelektrischen Effekte mit Unrecht als Elektronenabspaltungen von Einheiten von  $4,8 \cdot 10^{-10}$  e. st. E. voraussetzen. Denn diese Voraussetzung scheint nicht nur durch eine Reihe von früheren Arbeiten anderer Autoren, sondern gerade auch durch die vorhergegangenen Resultate der beiden Beobachter selbst widerlegt.

### § 7. Zusammenfassung.

Zusammenfassend kann man bezüglich der besprochenen Arbeiten E. Meyers und W. Gerlachs folgendes bemerken:

1. Durch die mikrophotographischen und optisch-elektromagnetischen Untersuchungen F. Ehrenhafts ist die Anwendbarkeit der Stokes-Cunninghamschen Gesetze auf alle im elektrischen Flammenbogen zerstäubten Edelmetalle und Hg, also wahrscheinlich auch auf das von den genannten Autoren wiederverwendete Pt in inerten Gasen erwiesen.

---

1) Die Herren E. Meyer u. W. Gerlach benennen daher auch mit Unrecht ihre Arbeit: „Über den photoelektrischen Effekt *ultramikroskopischer* Metallteilchen“ (vgl. diesbezüglich diese Abhandlung p. 57).

2) E. Meyer und W. Gerlach, Ann. d. Phys. 47. p. 227. 1915: „Die Abhängigkeit der photoelektrischen Verzögerungszeit vom Gasdruck bei Metallteilchen ultramikroskopischer Größenordnung“.



2. Beobachtungen an solchen geladenen Kugeln geben bei allen bisher erschienenen Arbeiten weitgehende Unterschreitungen des hypothetischen Elektrons.

Solche Unterschreitungen erhielten auch, wie alle anderen Beobachter, E. Meyer und W. Gerlach; denn, solange sie für Pt keinen belegbaren Grund für die Nichtanwendbarkeit der Stokes-Cunninghamschen Gesetze anführen, müssen die von diesen errechneten Unterschreitungen als auf tatsächlich stattgefundenen Naturvorgängen beruhend angesehen werden. Die Unterschreitungen, auf welche die Autoren selbst schließen müssen, sind aber noch nicht genug weitgehend, wie die Unterschreitungen zeigen, die sich aus ihren Messungen auf Grund der Deduktionen p. 73 vorliegender Abhandlung ergeben.

Wenn aber von den genannten Autoren die Kugelgestalt des beobachteten Cu-Materials angezweifelt wird, so dürfen die erwähnten Bewegungsgesetze überhaupt nicht zur Berechnung herangezogen werden; auch dürfen dann auf Grundlage dieser unsicheren Resultate keinerlei Schlüsse über Existenz oder Nichtexistenz des Elektrons gezogen werden.

3. Die Berechnungsweise nach den Gesetzen der Brownschen Bewegung ergibt zu große Resultate für Masse und Ladung der Teilchen. Trotzdem bleiben die von F. Ehrenhaft und dem Autor gefundenen Elektrizitätsmengen, selbst wenn ihre Größe nach der Brownschen Bewegung bestimmt wird, viel kleiner als Bruchteile des „Elektrons“ um  $4,8 \cdot 10^{-10}$  e. st. E. Analoge Resultate berechnet F. Zerner<sup>1)</sup> aus den Millikanschen Messungen an dem Dielektrikum Öl. Bei den Versuchen von E. Meyer und W. Gerlach ist der den Beobachtungen anhaftende Versuchsfehler im Vergleich zu der zu beobachtenden Brownschen Bewegung so groß, daß die Brownsche Bewegung praktisch in den Versuchsfehlern verschwindet. Die von den Autoren beobachtete „Bewegung“ ist also ausschließlich Versuchsfehler, und es darf aus ihr kein wie immer gearteter Schluß auf physikalische Vorgänge, insbesondere auf Übereinstimmung oder Nichtübereinstimmung mit den Resultaten aus den Widerstandsgesetzen oder gar auf Mög-

1) F. Zerner, Physik. Zeitschr. 16. p. 10—13. 1915.

lichkeit oder Unmöglichkeit der Existenz eines Elementarquantums  $4,8 \cdot 10^{-10}$  e. st. E. auf Grund dieser „Brownschen Bewegung“ gezogen werden. Die Relation zwischen Beobachtungsgröße und Beobachtungsfehler, sowie die großen Versuchsfehler bei der Kritik an der Atomistik der Elektrizität beweisen, daß die von E. Meyer und W. Gerlach gewählte Anordnung — Fernrohranordnung mit geringer Apertur, statt eines hochaperturigen Beleuchtungs- und Beobachtungssystems — nicht die nötige Präzision in der Bestimmung zuläßt. Insbesondere enthalten die Messungen der erwähnten Arbeiten selbst keine Beobachtung an ultramikroskopischen Teilchen, denn der kleinste angegebene Teilchenradius ist:  $a = 4,05 \cdot 10^{-5}$  cm, also ein Partikel von der Lineardimension von ca. 1,5 Wellenlängen gelben Lichtes (Pt Nr. 658, p. 211, Tab. 21).

4. Das gleiche Resultat ergibt sich bei den Beobachtungen E. Meyers und W. Gerlachs bezüglich der Umladungen und deren Messung durch „Haltepotentiale“. Hier fällt aber der Umstand noch schwer ins Gewicht, daß der dem Resultat anhaftende Fehler weder der Richtung noch der Größe nach bestimmt ist, und infolgedessen der Wahl der Vielfachheit der beobachteten Ladungen zu großer Spielraum geboten wird, so daß kein direkter Schluß über ein kleinstes Quant der Elektrizität möglich ist. Es ergeben sich aber in der oberwähnten Arbeit bestimmte Anhaltspunkte dafür, daß eine Atomistik der Elektrizität auch dann unmöglich ist, wenn als Elementarquantum ein Bruchteil — ein Drittel — des bisher als unteilbar angenommenen Elektrons vorausgesetzt würde.

Da bei der Methode von F. Ehrenhaft, welche zu jeder einzelnen Ladung zwei Grenzspannungen bestimmt, *eine Willkür in der Wahl der Vielfachheit nicht möglich ist*, und daraus ein *exakter* Schluß nach der einen, wichtigen Seite hin gezogen werden kann, muß diese Methode dem von Joffé, E. Meyer und W. Gerlach eingeschlagenen „Schweben“-verfahren unbedingt vorgezogen werden.

Da aus den erwähnten Versuchen dieser Autoren, sowie aus einer Reihe von anderen, sich nirgends Beweise für, sondern bloß *gegen* die Existenz eines Elementarquantums um  $4,8 \cdot 10^{-10}$  e. st. E. ergeben, durften E. Meyer und

W. Gerlach in den Rechnungen und Erörterungen über photoelektrische Erscheinungen die Größe einer Elektronenladung von  $e = 4,8 \cdot 10^{-10}$  e. st. E., die sie in ihrer neuen Arbeit wieder zur Grundlage nehmen, nicht mehr verwenden.

Wien, I. Phys. Institut, Juli 1915.

(Eingegangen 12. Juli 1915.)

---

*Nachtrag bei der Korrektur.*

Soeben erscheint eine dritte Arbeit von E. Meyer und W. Gerlach<sup>1)</sup>, die im wesentlichen den gleichen Gedanken wie die bereits zitierten verwendet, indem die beiden Autoren, von der Annahme eines Elektrons um  $4,8 \cdot 10^{-10}$  e. st. E. ausgehend, die Größenbestimmung von Pt-Teilchen durchzuführen und auf diese Weise die Ungültigkeit des Stokes'schen Gesetzes mit seinen Korrekturen nachzuweisen suchen. Da sich aber bisher noch in keiner der durchgeführten direkten Untersuchungen die Tatsache eines unteilbaren Elektrizitätsquantum in dieser Größenordnung ergeben hat, kann diese Grundvoraussetzung nicht an die Spitze von Prüfungen über die Gültigkeit oder Ungültigkeit eines Gesetzes gestellt werden, dessen Verifizierung an anderen Materialien auf direktem Wege möglich war (vgl. p. 69).

Auch in den Einzelheiten der letzterwähnten Arbeit gelten die p. 61 gemachten Einwände bezüglich der Ungenauigkeit der Beobachtungsmethode und der *Willkür* in der Wahl der Vielfachheit der Zahlen  $p$ , welche letztere die Autoren (p. 206) *nunmehr selbst* zugeben. Eine der Tab. 2 analoge Zusammenstellung ergibt für Pt 602 (l. c. p. 204) diese Tatsache hinreichend.

Aus nachstehender Tabelle ist ersichtlich, daß die Hälfte der gefundenen Elektrizitätsmengen Abweichungen von mehr als

---

1) E. Meyer u. W. Gerlach, Über die Gültigkeit der Stokes'schen Formel und die Massenbestimmung ultramikroskopischer Partikel. Elster-Geitel-Festschrift, p. 196. F. Vieweg & Sohn. Braunschweig, April 1915.

Tabelle.

$10^3 \delta_i$	$p_i$	$\alpha$ % Fehler	$10^3 \delta_i$	$p_i$	$\alpha$ % Fehler
5,44	1	+13	18,78	4	-9
19,43	4	+4	21,00	4	+37
14,65	3	+5	21,02	4	+37
18,82	4	-9	15,02	3	+12
36,62	8	-38	48,43	10	+7
18,09	4	-24	22,73	5	-27
20,15	4	+19	20,18	4	+20
34,80	7	+24	29,08	6	-5
17,80	4	-30	12,09	3	-48

20 Proz. von den Multipla des ermittelten „Quants“ zeigen, davon eine -48 Proz., eine andere +37 Proz. Physikalisch bedeutet das Abweichungen der Ladungswerte um die Hälfte des „Elektronenwertes“.

Es läßt sich also auch hier nicht auf eine Atomistik der Elektrizität schließen (vgl. p. 75), so daß aus dieser unsicheren Annahme ein weiterer indirekter Schluß über die Gültigkeit der Widerstandsgesetze keine Sicherheit bietet. Vielmehr ergeben sich, wie schon erwähnt, in den Versuchen Knudsen-Webers<sup>1)</sup>, Mc Keehans<sup>1)</sup> an mikroskopischen und übermikroskopischen Teilchen auf mechanischem, und in letzter Zeit F. Ehrenhafts<sup>1)</sup> im submikroskopischen Gebiete auf rein optischem Wege an einwandfreiem Material direkte und einwandfreie Beweise für eine Gültigkeit der Widerstandsgesetze innerhalb gewisser Genauigkeitsgrenzen, welche aber, wo es sich um die Größenbestimmung von Teilchen der Ordnung von Bruchteilen der Wellenlänge des Lichtes handelt, eng genug sind, um die genannten Gesetze zum Maßstab für so kleine Dimensionsbestimmungen zu verwenden.

In der Arbeit von M. Knudsen und S. Weber werden speziell makroskopische Kugeln verwendet; um das Bewegungsgesetz in Abhängigkeit von dem Verhältnis: Mittlere freie Weglänge der Molekeln zu Radius prüfen zu können, wurde die mittlere freie Weglänge durch Verminderung des Gas-

1) l. c.

druckes vergrößert. Dabei wurde eine Korrektur der Stokes'schen Formel gefunden, die der Cunninghamschen nahekommt, aber unter anderem ein negatives  $f$  in dieser theoretischen Formel Cunninghams ergeben würde. Damit aber ist prinzipiell die Möglichkeit eines scheinbar negativen  $f$  in der genannten Formel erwiesen. Einen analogen Gedankengang verfolgten E. Meyer und W. Gerlach in ihrer letzten Arbeit; auch an ihren Resultaten ergibt die Cunningham'sche Formel  $f = 0$  mit zunehmendem  $l/a$  bei dem gleichen Teilchen scheinbar abnehmende Werte für  $a$ , was gleichfalls auf ein scheinbares  $f < 0$  schließen ließe. Die Resultate beider Beobachtungen können nun insofern mit dem theoretischen gut übereinstimmend genannt werden, als bei der Ableitung von Cunningham gewisse Vernachlässigungen zur rechnerischen Durchführung gemacht werden mußten. *An der Tatsache der von F. Ehrenhaft und mir gefundenen namhaften Unterschreitungen des Wertes des sogenannten Elektrons ändern aber derartige kleine Korrekturen der Widerstandsgesetze nichts.*

Bezüglich der Vergleiche, welche E. Meyer und W. Gerlach mit den Resultaten anderer Physiker an im Lichtbogen verbranntem Zn<sup>1)</sup>, ferner an Zinnober, Schellak usw. angestellt werden, so kann an einwandfreiem Material (Edelmetalle, Hg) die Kugelgestalt nicht mehr angezweifelt werden.

Zu dem Hinweis auf die Arbeit von M. Vogl<sup>2)</sup>, in welcher sich neben Unterschreitungen des Wertes des sogenannten Elektrons scheinbare Anhaltspunkte für eine nicht kugelförmige Gestalt der im elektrischen Bogen hergestellten Au-Teilchen ergeben, muß bemerkt werden, daß die interessanten Resultate dieser Arbeit, welche die Unhaltbarkeit solcher Schlüsse ergeben, leider nicht veröffentlicht wurden.<sup>3)</sup> Wäre nämlich die Form der verwendeten Au-Teilchen nicht die

1) Die bekannten Photographien F. Ehrenhafts ergaben bei Edelmetallen Kugelgestalt, bei in Luft zerstäubtem Zn jedoch unregelmäßige Struktur.

2) M. Vogl, Wien. Akad. Ber. 122, IIa. p. 1885. 1913.

3) Diese Arbeit, die im Prager Physikalischen Universitätsinstitute bei Prof. A. Lampa ausgeführt worden ist, wurde mir durch die Liebenswürdigkeit des genannten Institutsvorstandes in Vollständigkeit zur Verfügung gestellt. Die hier vorgebrachten Argumentationen stammen von Herrn F. Zerner.

einer Kugel gewesen, so müßte, da das betreffende Partikel im Schwere- und im elektrischen Felde anders orientiert gewesen wäre (der Widerstand und damit) die Beweglichkeit des Partikels in den beiden Feldern eine andere, im elektrischen Felde etwa  $B_e$ , in dem der Schwere  $B_f$  gewesen sein. Es wäre also die im Schwerefelde erreichte Geschwindigkeit  $v_f$  gegeben durch:

$$mg = \frac{v_f}{B_f}$$

die im elektrischen Felde durch:

$$e\mathfrak{E} - mg = \frac{v_e}{B_e},$$

oder die Bewegungsgleichung würde in diesem Falle

$$e\mathfrak{E} = \frac{v_f}{B_f} + \frac{v_e}{B_e} = \frac{v_f + v_e \frac{B_f}{B_e}}{B_f}$$

lauten gegenüber der bei der Kugel

$$e\mathfrak{E} = \frac{v_f + v_e}{B}$$

Tatsächlich ergibt sich nun eine Verschiedenheit der  $B_e$  und  $B_f$ , welche aus der Brownischen Bewegung errechnet wurden. Die genauen Untersuchungen dieser Frage klären aber die Ursache der Verschiedenheit auf.

Es gelang Frl. Vogl, die Geschwindigkeit des Goldteilchens sowohl bei einem der Schwere entgegengesetzten als auch bei dem gleich großen, aber der Schwere gleichgerichteten elektrischen Felde zu messen. Nennen wir die erste  $v_1$ , die Geschwindigkeit im Schwerefelde  $v_2$ , die im vereinten Schwere- und elektrischen Felde  $v_3$ , so ist:

$$(1) \quad e\mathfrak{E} = \frac{v_2}{B_f} + \frac{v_1}{B_e} = \frac{v_2 + v_1 \frac{B_f}{B_e}}{B_e}$$

$$(2) \quad e\mathfrak{E} + \frac{v_2}{B_f} = \frac{v_3}{B_e}, \quad \text{oder}$$

$$(3) \quad \frac{v_1 + v_3}{2} = v_1 + v_2 \frac{B_e}{B_f}.$$

Wäre nun

$$(3a) \quad \frac{v_1 + v_2}{2} > v_1 + v_2,$$

so müßte auf  $B_e > B_f$  geschlossen werden, im Falle

$$(3b) \quad \frac{v_1 + v_2}{2} < v_1 + v_2 \quad \text{auf } B_e < B_f.$$

Wird nun noch das gleiche Teilchen bei dem der Schwere entgegengesetzten Felde  $\mathcal{E}'$  beobachtet, so ergibt sich die Geschwindigkeit  $v_1'$ :

$$(4) \quad e\mathcal{E}' = \frac{v_2 + v_1' \frac{B_e}{B_f}}{B_e}.$$

Das Verhältnis der Intensitäten der beiden elektrostatischen Felder ist:

$$(5) \quad \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{E}'} = \frac{v_1 + v_2 \frac{B_e}{B_f}}{v_1' + v_2 \frac{B_e}{B_f}}.$$

Für  $v_1' < v_1$  ist, wenn  $B_e > B_f$  ist

$$(5a) \quad \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{E}'} < \frac{v_1 + v_2}{v_1' + v_2}$$

und umgekehrt; im Falle  $B_e < B_f$  muß

$$(5b) \quad \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{E}'} > \frac{v_1 + v_2}{v_1' + v_2}$$

sein, und umgekehrt.

Unter den von M. Vogl beobachteten Partikeln befinden sich zwei, an welchen alle diese Beobachtungen gemacht werden konnten. Die betreffenden Resultate sind:

Part. Nr.	$\frac{v_1 + v_2}{2}$	$v_1 + v_2$	$\frac{\mathcal{E}}{\mathcal{E}'}$	$\frac{v_1 + v_2}{v_1' + v_2}$
39	0,00997	0,01013	1,666	1,746
40	0,05896	0,05822	1,557	1,144



Partikel Nr. 39 ergäbe nach (3b)

$$B_e < B_f ;$$

aber nach (5a)

$$B_e > B_f .$$

Partikel Nr. 40 ähnlich nach (3a)

$$B_e > B_f ,$$

jedoch nach (5b)

$$B_e < B_f .$$

Diese Widersprüche zeigen wohl am deutlichsten, daß der Unterschied im *numerischen* Resultate der Beweglichkeiten nicht auf in der Natur begründete Verschiedenheit derselben beruht, sondern von der für die Berechnung der Brownschen Bewegung noch nicht genügend breiten Statistik herrührt<sup>1)</sup>; aus der Arbeit von M. Vogl ergibt sich also keine begründete Differenz in den Beweglichkeiten und mithin kein Anhaltspunkt für eine nichtkugelförmige Gestalt der beobachteten Goldteilchen, deren Kugelgestalt vielmehr durch die Ehrenhaftischen Photographien seither vollkommen erwiesen ist.

Zusammenfassend können aus den erwähnten Arbeiten<sup>2)</sup> folgende Punkte herausgegriffen werden.

1. E. Meyer und W. Gerlach beobachten Teilchen von Radien über  $4,5 \cdot 10^{-5}$  cm, d. h. im mikroskopischen Gebiete; es wirkt also verwirrend, wenn diese Autoren aus der bloßen Tatsache der ultramikroskopischen Beleuchtungsanordnung mit Fernrohr die beobachteten Teilchen selbst als ultramikroskopisch bezeichnen.

2. Aus den publizierten Versuchen E. Meyers und W. Gerlachs ergibt sich nirgends ein Anhaltspunkt für ein Elektron um  $4,8 \cdot 10^{-10}$  e. st. E., noch ein solcher,

---

1) Vgl. Konstantinowsky, Wiener Akadem. Berichte 123. IIa. p. 1721 ff.

2) Die für ein detailliertes Studium notwendigen, unmittelbar aus dem Experimente erhaltenen, vollständigen Zahlenangaben enthält auch die letzte Arbeit E. Meyers und W. Gerlachs leider nicht.



welcher auf irgend eine Atomistik der Elektrizität schließen ließe; denn die Abweichungen werden auch hier wieder von der Größenordnung des angenommenen Elementarquantums.

8. Die Voraussetzung eines unteilbaren Quantes in der genannten Größenordnung darf daher nicht zur Grundlage von Argumentationen herangezogen werden.

Scheinwerferabteilung, August 1915.

**3. Die Beziehungen zwischen den adiabatischen  
und isothermen Koeffizienten der galvano- und  
thermomagnetischen Effekte;  
von T. Heurlinger.**

§ 1. *Einleitung.* Aus seiner auf Grundlage der Lorentz-schen Elektronentheorie durchgeführten Berechnung der galvanomagnetischen Effekte hat R. Gans<sup>1)</sup> gefolgert, daß sich verschiedene Werte des Hallkoeffizienten ergeben sollten, je nachdem bei der Messung die transversale galvanomagnetische Temperaturdifferenz zur Ausbildung gelangte oder nicht (adiabatischer bzw. isothermer Fall). Ähnliches sollte für die anderen Effekte gelten. Um den isothermen Fall zu realisieren, muß man die Ausbildung der transversalen Temperaturdifferenz künstlich verhindern, etwa dadurch, daß man die Hallplatte mit fließendem Wasser umgibt. Bei Messung in Luft ist nämlich der adiabatische Fall angenähert verwirklicht. Kurz nach dem Erscheinen der Arbeit von Gans hat H. Zahn<sup>2)</sup> es versucht, den Unterschied zwischen dem adiabatischen und isothermen Hallkoeffizienten am Wismut nachzuweisen, aber beide Koeffizienten innerhalb der Versuchsfehler gleich gefunden.

Durch eine kürzlich in dieser Zeitschrift erschienene Arbeit von H. Zahn<sup>3)</sup> hat die Frage erneutes Interesse erhalten. Es ist eine bekannte Tatsache, daß die transversale Temperaturdifferenz zur Ausbildung eine beträchtliche Zeit braucht. Hieraus schließt nun Zahn, daß der isotherme Fall verwirklicht ist, wenn als Primärstrom ein genügend hochfrequenter Wechselstrom benutzt wird. In der Tat ist ihm der Nachweis gelungen, daß bei Wismut der Wechselstromwert des Hallkoeffizienten von dem Gleichstromwert, welcher angenähert dem adiabatischen entspricht, verschieden ist, und zwar ist

1) R. Gans, Ann. d. Phys. **20**. p. 293. 1906.

2) H. Zahn, Ann. d. Phys. **23**. p. 131. 1907.

3) H. Zahn, Ann. d. Phys. **47**. p. 49. 1915.

der erstere Wert um einige Prozente numerisch kleiner. Nach orientierenden Versuchen war auch in Antimon und Wismut-Zinnlegierung ein Unterschied vorhanden. Auch Zahns oben erwähnte frühere Versuche scheinen ihm, nach einer näheren Untersuchung der Fehlerquellen, nicht die Gleichheit der beiden Koeffizienten zu beweisen, sondern es vielmehr anzudeuten, daß bei Wismut der adiabatische Koeffizient numerisch größer als der isotherme ist.

Zahn diskutiert die Ergebnisse vom Standpunkte der Gansschen Theorie aus, bemerkt aber, daß diese Theorie bestenfalls nur qualitativ richtige Resultate geben kann. In der Tat ist ja diese Theorie, wie es Gans selbst hervorhebt, in offenbarem Widerspruch mit der Erfahrung. (Sie gibt z. B. falsches Vorzeichen für die galvanomagnetische Temperaturdifferenz, um deren Wirkung es sich hier handelt.) Im folgenden berechnen wir den Einfluß dieser Temperaturdifferenz unter allgemeineren Annahmen. Glücklicherweise ist es nämlich nicht nötig, die Elektronentheorie heranzuziehen, sondern es lassen sich alle Fragen über den Einfluß der verschiedenen Umstände bei der Messung von einem mehr phänomenologischen Standpunkt aus beantworten.

Wegen der gewissermaßen sekundären Wirkung der transversalen Temperaturdifferenz sind die adiabatischen galvanomagnetischen Koeffizienten komplizierter und theoretisch weniger interessant als die isothermen. In den thermomagnetischen Effekten spielt die transversale thermomagnetische Temperaturdifferenz eine ähnliche Rolle. Auch diese Wirkung, die sich experimentell wohl nicht beseitigen läßt, wird im folgenden berechnet. Dabei benutzen wir auch für die thermomagnetischen Koeffizienten die Bezeichnungen adiabatisch und isotherm, obwohl letztere hier nicht ganz treffend ist.

§ 2. *Der Ansatz zur Beschreibung der Effekte.* Wir betrachten einen homogenen und isotropen metallischen Leiter, der sich in einem Magnetfelde befindet und von stationären elektrischen und thermischen Strömen durchflossen wird. Die magnetische Feldstärke sei  $H$ ; sie habe überall die gleiche Richtung, und diese wählen wir zur  $z$ -Richtung eines Koordinatensystemes.  $j_x, j_y, j_z$  seien die Komponenten der elektrischen Stromdichte,  $W_x, W_y, W_z$  die der Wärmestromdichte,

ferner  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  und  $T_x$ ,  $T_y$ ,  $T_z$  bzw. die Komponenten der elektrischen Feldstärke und des Temperaturgradienten.

Wir gehen nun von der Annahme aus, daß  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ ,  $W_x$ ,  $W_y$ ,  $W_z$  in jedem Punkte des Körpers ganze lineare Funktionen sind von den auf denselben Punkt bezogenen Komponenten  $j_x$ ,  $j_y$ ,  $j_z$ ,  $T_x$ ,  $T_y$ ,  $T_z$ .

Offenbar müssen die Funktionen homogen sein, damit die ersteren sechs Komponenten verschwinden, wenn die sechs letzteren gleich Null sind. Da ferner unser Gleichungssystem bei einer Drehung des Koordinatensystems um die  $Z$ -Achse unverändert bleiben soll, und da in einem longitudinalen Magnetfelde keine Transversaleffekte auftreten, läßt es sich in folgender Weise schreiben:

$$(1) \quad \begin{cases} X = \alpha_1 j_x - \alpha_2 j_y + \alpha_3 T_x - \alpha_4 T_y; \\ Y = \alpha_2 j_x + \alpha_1 j_y + \alpha_4 T_x + \alpha_3 T_y; \\ W_x = \beta_1 j_x - \beta_2 j_y + \beta_3 T_x - \beta_4 T_y; \\ W_y = \beta_2 j_x + \beta_1 j_y + \beta_4 T_x + \beta_3 T_y; \\ Z = \gamma_1 j_x + \gamma_2 T_x; \\ W_z = \delta_1 j_x + \delta_2 T_x. \end{cases}$$

Die Koeffizienten sind Funktionen der Temperatur und der magnetischen Feldstärke, und zwar sind, wie sich aus der Symmetrie ergibt, die mit ungeraden Indizes gerade, die mit geraden Indizes ungerade Funktionen von  $H$ .

Während die Elektronentheorie, die zu Gleichungen von der Form (1) mit theoretisch bestimmten Werten der Koeffizienten führt<sup>1)</sup>, bisher wenigstens für die Effekte in den ferromagnetischen Elementen und den Elementen der Wismutgruppe versagte, dürfte obiger Ansatz mit empirisch bestimmten Koeffizienten auch für diese Elemente gelten.<sup>2)</sup>

Im folgenden beschränken wir uns auf die Erscheinungen in einem transversalen Magnetfelde, haben es also nur mit den vier ersten Gleichungen (1) zu tun. Diese wenden wir auf die zur Messung der Effekte benutzte Platte und ihre

1) Davon überzeugt man sich durch eine einfache Umformung der Gleichungen von R. Gans, l. c.

2) Inwiefern der Ansatz für nicht stationäre Zustände verallgemeinert werden muß, mag dahingestellt bleiben.

Ansatzelektroden an. Als  $x$ -Richtung sei dabei die Richtung des Primärstromes gewählt.

Es ist nur eine formelle Änderung, wenn wir, um möglichst mit den üblichen Bezeichnungen für die Effekte Übereinstimmung zu erhalten, und zwecks einer einfachen Gestalt unserer Beziehungen, unsere vier Gleichungen in folgender Weise schreiben:

$$(2) \quad \begin{cases} X = \varrho^0(1 + A_i H^2)j_x - B_i H j_y + (\alpha_3^0 + E_i H^2)T_x \\ \quad - Q_i H T_y; \\ Y = B_i H j_x + \varrho^0(1 + A_i H^2)j_y + Q_i H T_x \\ \quad + (\alpha_3^0 + E_i H^2)T_y; \\ W_x = (\beta_1^0 + \Pi_i H^2)j_x + \alpha_i P H j_y - \alpha_i T_x \\ \quad - \alpha_i S H T_y; \\ W_y = -\alpha_i P H j_x + (\beta_1^0 + \Pi_i H^2)j_y + \alpha_i S \Pi T_x \\ \quad - \alpha_i T_y; \end{cases}$$

$$\text{und } \alpha_i = \alpha^0(1 + K_i H^2)$$

setzen.

Obgleich wir  $H$ , wie man es gewöhnlich tut, explizit eingeführt haben, setzen wir nämlich über die Abhängigkeit der Koeffizienten von  $H$  nur voraus, daß  $\varrho^0$ ,  $\alpha_3^0$ ,  $\beta_1^0$ ,  $\alpha^0$  von  $H$  unabhängig, die übrigen gerade Funktionen von  $H$  sind.<sup>1)</sup>

Die physikalische Bedeutung der Koeffizienten ergibt sich aus den Gleichungen (2) durch Betrachtung der einfachsten Fälle. Setzen wir zunächst  $H = 0$ , so sehen wir sofort, daß:

$\varrho^0$  = spezifischer elektrischer Widerstand;

$\alpha^0$  = Wärmeleitfähigkeit;

$\alpha_3^0 T_x$  = die elektrische Feldstärke, welche in einem stromlosen Leiter den Temperaturgradienten  $T_x$  begleitet;

1) Besonders beim Wismut sind die mit großen Buchstaben bezeichneten Koeffizienten keineswegs unabhängig von  $H$ ; z. B. ist  $E_i H^2$  eher proportional  $|H|$  als  $H^2$ , weshalb wir diese Größe gelegentlich nur mit  $e_i$  bezeichnen wollen. — Daß wir  $H$  in obiger Weise eingeführt haben, beschränkt natürlich nicht die Gültigkeit der unten erhaltenen Beziehungen; nur hat man sich zu erinnern, daß in diesen sämtliche Koeffizienten auf dieselbe Feldstärke bezogen sind.

$\beta_1^0 j_x$  = die Dichte des Energiestromes in einem gleich-temperierten Leiter, welcher von einem elektrischen Strom von der Dichte  $j_x$  durchflossen wird.

$\alpha_3^0$  und  $\beta_1^0$  sind nicht einzeln, sondern nur in der Kombination  $\alpha_3^0 - (d\beta_1^0/dT)$  (als Thomsonkoeffizient) experimentell bekannt. Für eine folgende Anwendung bemerken wir, daß  $\alpha_3^0$  nach der Lorentzschen Elektronentheorie (auch unter den von N. Bohr verallgemeinerten Annahmen) negativ ist, wenn man nicht über die Temperaturabhängigkeit der Anzahl  $N$  der freien Elektronen die wenig wahrscheinliche Annahme  $2T \frac{d \log N}{dT} \leq -1$  macht.<sup>1)</sup>

Setzen wir, wenn  $H \neq 0$ ,  $j_y = T_x = T_y = 0$ , bzw.  $j_y = j_x = T_y = 0$  in (2) ein, geben die drei ersten Gleichungen Ausdrücke für drei galvano- bzw. thermomagnetische Effekte, während sich die übrigen Effekte aus der vierten Gleichung ergeben, wenn man  $j_y = T_x = W_y = 0$ , bzw.  $j_y = j_x = W_y = 0$  einsetzt. Aus den so erhaltenen Gleichungen erkennt man die Bedeutung der mit großen Buchstaben bezeichneten Größen; in Worten läßt sie sich wie folgt angeben:

Koeffizient des longitudinalen	galvanomagnetischen Potentialeffekts $A_i$ ,
	galvanomagnetischen Temperatureffekts $\Pi_i$ ,
	thermomagnetischen Potentialeffekts $E_i$ ,
	thermomagnetischen Temperatureffekts $K_i$ ;
Koeffizient des transversalen	galvanomagnetischen Potential(Hall)effekts $B_i$ ,
	galvanomagnetischen Temperatur(v. Ettingshausens)effekts $P$ ,
	thermomagnetischen Potential(Nernst)effekts $Q_i$ ,
	thermomagnetischen Temperatur(Leduc)effekts $S$ .

Die mit dem Index  $i$  bezeichneten Koeffizienten sind die *isothermen*, welche sich aus der Messung ergeben würden, wenn keine transversale Temperaturdifferenz vorhanden wäre.

Durch die Gleichungen, aus denen wir die Bedeutung der Koeffizienten erkannten, werden diese indessen nicht mit direkt meßbaren Größen verknüpft; z. B. müssen die Feld-

1) N. Bohr, Diss. Kopenhagen 1911. p. 66.

stärken erst integriert werden, um die der Messung zugänglichen Potentialdifferenzen zu geben. Ein Vergleich mit den empirischen Definitionsgleichungen der galvano- und thermomagnetischen Koeffizienten lehrt dann: erstens, daß unser Ansatz die Abhängigkeit der Effekte von den Plattendimensionen und dem primären Strome bzw. Temperaturgradienten richtig darstellt, und zweitens, daß unsere Koeffizienten — wenn nötig auf eine mittlere Plattentemperatur reduziert — mit den gleichbenannten empirisch definierten identisch sind.

Auch die Vorzeichen der Transversalkoeffizienten werden durch die Gleichungen (2) definiert, wenn wir etwa bestimmen, daß die positiven  $x$ ,  $y$  und  $H$ -Richtungen in dieser Ordnung ein Rechtssystem bilden sollen.

§ 3. *Herleitung der Beziehungen zwischen den adiabatischen und isothermen Koeffizienten.* Mit Hilfe der Gleichungen (2) können nun die unter beliebigen Versuchsbedingungen gemessenen Effekte aus den oben eingeführten acht galvano- und thermomagnetischen Koeffizienten berechnet werden, und zwar mittels Beziehungen, welche ausschließlich experimentell bekannte Größen enthalten. Die Gleichungen (2) enthalten freilich auch die nicht empirisch bekannten Koeffizienten  $\alpha_3^0$  und  $\beta_1^0$ . Gerade wie wenn kein Magnetfeld vorhanden ist, kommen aber diese nur in der bekannten Kombination

$$\alpha_3^0 - \frac{d\beta_1^0}{dT}$$

in den meßbaren Effekten vor, nämlich in dem Ausdruck für die entwickelte Wärme:

$$j_x X + j_y Y - \frac{\partial W_x}{\partial x} - \frac{\partial W_y}{\partial y}.$$

In der Potentialdifferenz  $-\int(X dx + Y dy)$  zwischen zwei Punkten kommt  $\beta_1^0$  überhaupt nicht,  $\alpha_3^0$  nur im Term  $\int \alpha_3^0 dT$  vor, welcher verschwindet, da die üblichen Messmethoden immer Potentialdifferenzen zwischen gleichtemperierten Punkten geben (vgl. p. 8). Elektronentheoretische Betrachtungen, welche uns nur noch den Wert von  $\alpha_3^0$  geben könnten, sind also zu unserem Zweck überflüssig.

Wir nehmen nun an, daß bei der Messung sämtlicher galvanomagnetischer Effekte  $T_y$  in der Platte den Wert  $-PHj_x$  hat, und außerdem, daß  $T_x = 0$  oder die Korrektur wegen eines vorhandenen longitudinalen Temperaturgefälles mit Hilfe

von (2) schon angebracht worden ist. Bei der Messung der thermomagnetischen Effekte habe  $T_y$  den Wert  $SHT_x$ . Die unter diesen Verhältnissen gemessenen Effekte sind die *adiabatischen*. Durch Einsetzen von  $j_y = T_x = 0$ ,  $T_y = -PHj_x$ , bzw.  $j_y = j_x = 0$ ,  $T_y = SHT_x$  in (2) erhält man die Ausdrücke für  $X$ ,  $Y$ ,  $W_x$ ,  $W_y$ . ( $W_y = 0$ ). Definiert man nun  $A_a$ ,  $B_a$ ,  $\Pi_a$  und  $E_a$ ,  $Q_a$ ,  $K_a$  so, daß  $X$ ,  $Y$ ,  $W_x$  mit diesen Koeffizienten durch dieselben Gleichungen verknüpft werden, welche  $X$ ,  $Y$ ,  $W_x$  im Falle  $j_y = T_x = T_y = 0$ , bzw.  $j_y = j_x = T_y = 0$  mit den entsprechenden isothermen Koeffizienten verbinden, so ergeben sich folgende Beziehungen:

$$(3) \quad \begin{cases} \varphi^0(A_a - A_i) = & Q_i P, \\ [B_a - B_i] = -(\alpha_s^0 + E_i H^2) P, \\ \Pi_a - \Pi_i = & \alpha_i S P. \end{cases}$$

$$(4) \quad \begin{cases} E_a - E_i = & -Q_i S, \\ [Q_a - Q_i] = (\alpha_s^0 + E_i H^2) S, \\ K_a - K_i = (1 + K_i H^2) S S. \end{cases}$$

Die zweite Gleichung jedes Systemes habe ich in Klammern geschrieben, weil die so definierten Koeffizienten  $B_a$  und  $Q_a$  nicht die der Messung zugänglich sind.

Wie wir oben bemerkten, ist nämlich nicht die Feldstärke, in diesem Falle  $Y$ , sondern die sich daraus berechnende Potentialdifferenz:  $\Delta V = -\int Y dy$  direkt meßbar. Empirisch definiert man demnach den Hallkoeffizienten durch die Gleichung  $-\Delta V = B \cdot H j_x \cdot \beta$ , wo  $\beta$  die Breite der Platte bedeutet. Im isothermen Falle genügt es, die Integration von  $Y$  von dem einen Plattenrand zum anderen zu erstrecken, und man überzeugt sich leicht, daß  $B_i$  wirklich mit dem empirisch definierten Koeffizienten identisch ist.

Anders im adiabatischen Falle. Bezeichnen wir mit  $P_2$  und  $P_3$  die Punkte, welche da liegen, wo die Platte in die Hallelektroden übergeht, und deren Temperaturunterschied im adiabatischen Falle gleich der Ettingshausenschen Temperaturdifferenz ist. Unter  $P_1$  und  $P_4$  verstehen wir dagegen zwei Punkte an den Hallelektroden oder ihren Zuführungsdrähten, welche so weit von der Platte gewählt sind, daß sie außerhalb des Magnetfeldes liegen und dieselbe Temperatur haben ( $T_4 = T_1$ ). Die Potentialdifferenz  $V_4 - V_1$  zwischen



diesen Punkten kann in jedem Falle der gemessenen gleich gesetzt werden. Im adiabatischen Fall ist aber  $V_4 - V_1$  keineswegs gleich  $V_3 - V_2$ . In der Tat ergibt sich aus dem sowohl für die Platte als die Elektroden geltenden Ausdruck für  $Y$ , den man aus (2), zweiter Gleichung, durch Einsetzen von  $j_y = T_x = 0$  erhält:

$$(5) \quad V_4 - V_1 = - \int_{P_1}^{P_4} Y dy = - \left\{ \int_{P_1}^{P_4} B_i H j_x dy + \int_{P_1}^{P_4} (\alpha_3^0 + e_i) \frac{\partial T}{\partial y} dy \right\};$$

wo wir  $e_i$  für  $E_i H^2$  geschrieben haben (Fußnote 1, p. 87).

Zum ersten Integrale gibt nur das Gebiet  $P_2 - P_3$  einen Beitrag, da in den Elektroden  $j_x = 0$ . Es wird also gleich  $B_i H j_x \beta$ .

Zum zweiten Integrale geben alle die Teile des Gebietes  $P_1 - P_4$  Beiträge, in welchen ein Temperaturgefälle herrscht. Nehmen wir an, daß in allen diesen Punkten das Material dasselbe wie in der Platte ist<sup>1)</sup>, so ist  $\alpha_3^0$  nur Funktion der Temperatur,  $e_i$  Funktion der Temperatur und der magnetischen Feldstärke. Da  $T_4 = T_1$  ist, wird

$$\int_{P_1}^{P_4} \alpha_3^0 \frac{\partial T}{\partial y} dy = 0.$$

$\int_{P_1}^{P_4} e_i \frac{\partial T}{\partial y} dy$  berechnen wir für folgende, in entgegengesetzter

Richtung idealisierte Fälle:

1. Alle Punkte zwischen  $P_1$  und  $P_4$ , in welchen ein Temperaturgefälle herrscht, liegen innerhalb des Magnetfeldes, dessen Stärke konstant ist.
2. Nur das Gebiet  $P_2 - P_3$  liegt innerhalb des konstanten Magnetfeldes. In den Gebieten  $P_1 - P_2$ ,  $P_3 - P_4$  ist  $H = 0$ .

1) Wenn dies nicht der Fall ist, muß  $\int_{P_1}^{P_4} \alpha_3^0 \frac{\partial T}{\partial y} dy$  durch eine über die Übergangsschicht integrierte Größe vervollständigt werden, um die Korrektur wegen der Thermokraft zu geben.

Im ersten Falle ist offenbar

$$\int_{P_1}^{P_2} e_i \frac{\partial T}{\partial y} dy = 0,$$

und der adiabatische Koeffizient unterscheidet sich nicht von dem isothermen.

Im zweiten Falle ist

$$\int_{P_1}^{P_2} e_i \frac{\partial T}{\partial y} dy = e_i (T_3 - T_2)$$

und

$$(6) \quad B_a - B_i = -e_i P^1).$$

In derselben Weise ergibt sich im ersten Falle:  $Q_a = Q_i$ ; im zweiten Falle:

$$(7) \quad Q_a - Q_i = e_i S.$$

Natürlich läßt sich  $B_a - B_i$  für eine beliebige Verteilung der Temperatur und Feldstärke aus (5) berechnen.

Die übrigen Gleichungen (3) und (4), welche sich auf die Longitudinalkoeffizienten beziehen, können dagegen aufrecht erhalten werden. Zwar muß man auch hier bei der Berechnung der meßbaren Größen auf die Verteilung der magnetischen Feldstärke und der Temperatur achten. Da es sich aber um die Verteilung in der  $x$ -Richtung handelt, sind die Verhältnisse im adiabatischen und isothermen Falle im wesentlichen dieselben.

§ 4. Vergleich mit der Theorie von R. Gans. Diskussion der Beziehungen. Der aus (5) berechnete adiabatische Hallkoeffizient unterscheidet sich wesentlich von dem nach R. Gans berechneten. Der Ganssche Ausdruck für  $B_a$  entspricht der ersten Annäherung des Ausdruckes in (3), zweiter Gleichung, also:

$$(8) \quad [B_a - B_i = -\alpha_3^0 P].^2)$$

Aus dem Gesagten geht hervor, daß sich der so berechnete adiabatische Koeffizient nur dann aus den Messungen ergeben würde, wenn man die oben mit  $V_3 - V_2$  bezeichnete Potential-

1) Prinzipiell sind hier unter  $e_i$  und  $P$  die auf eine mittlere Temperatur reduzierten Werte zu verstehen.

2) Vgl. die Formeln (39'), (45'), (46') von R. Gans, l. c. p. 305 u. 306.

differenz messen könnte, was nicht der Fall ist. Die nach der Theorie von Gans berechneten Korrekturen wegen der transversalen Temperaturdifferenz sind also unrichtig.<sup>1)</sup>

Auch wenn die Messung den in (8) definierten adiabatischen Koeffizienten gegeben hätte, wäre es unzulässig, die Umrechnung auf den isothermen Koeffizienten mittels der Gansschen Beziehung vorzunehmen. Denn, wie schon bemerkt, widerspricht das von der Gansschen Theorie geforderte Vorzeichen von  $P$  in den meisten Fällen der Erfahrung, d. h. die Theorie berechnet tatsächlich den Einfluß eines dem wirklichen entgegengerichteten Temperaturgefälles. Während also nach Gans, falls  $a_3^0 < 0$  ist (vgl. oben p. 88),  $B_a - B_i < 0$  und  $|B_a| > |B_i|$  wird, würde sich aus (8) z. B. bei Wismut  $|B_a| < |B_i|$  ergeben.<sup>2)</sup>

1) Diese können besonders bei den Halbleitern sehr große Werte erreichen; z. B. führen Königsberger und Gottstein (Phys. Zeitschr. 14. p. 232. 1913) sowie Gottstein (Ann. d. Phys. 43. p. 1090. 1914) solche Korrekturen ein, die 30 bis nahe 100 Proz. betragen. Glücklicherweise werden indessen auch die unkorrigierten Werte mitgeteilt, welche dem isothermen Koeffizienten viel näher kommen dürften. — Es ist zu erwähnen, daß sich schon bei N. Bohr (l. c. p. 113 u. 114), bei der Berechnung der adiabatischen Feldstärke im Gansschen Sinne, eine Bemerkung findet, daß diese Feldstärke der Messung nicht direkt zugänglich sei. Indessen scheint Bohr damit nicht die oben vertretene Ansicht aussprechen zu wollen; wenigstens deutet er mit keinem Worte an, daß seine Auffassung sich von der Gansschen unterscheide oder das Ergebnis von Zahn (Ann. d. Phys. 23. p. 131. 1907) erklären könne.

2) Dieser Widerspruch kommt in der Diskussion von H. Zahn (Ann. d. Phys. 47. p. 49. 1915) nicht zum Vorschein, und zwar wegen eines in die Gleichung (2) (l. c. p. 51) untergelaufenen Vorzeichenfehlers. Diese Gleichung soll in der Tat  $B_a - B_i = + (1,721 \cdot 10^4 - q) P$  lauten, wie ich hier im Namen des Hrn. Zahn mitteile. Es hat mir nämlich Hr. Zahn freundlichst zu Veröffentlichung folgende Berichtigung brieflich mitgeteilt; „Es ist mir in der Tat, wie Sie bemerkten, bei Gleichung (2) meiner Arbeit ein Vorzeichenfehler vorgekommen; wie ich jetzt sehe, dadurch, daß ich für  $a/s$  nur den absoluten Wert einsetzte. — Ich halte es indessen doch für wahrscheinlich, daß auch bei Wismut  $|B_a| - |B_i| > 0$  ist, d. h. ich meine, den Wechselstromkoeffizienten des Halleffektes für den rein isothermen ansehen zu müssen, und möchte den Widerspruch gegen die Theorie als für diese belastend ansehen. Einmal wegen der Versuche mit Wassenumgebung — p. 72 meiner Arbeit — und dann, weil ich sonst keine plausible Erklärung für den Wechselstromeffekt in diesem hohen Betrage mir denken kann. Vom Standpunkte der Gansschen

Obige Bemerkungen gelten natürlich auch für den Nernst-Koeffizienten.

Zur Schätzung der aus unseren Beziehungen sich berechnenden Unterschiede zwischen adiabatischen und isothermen Effekten benutzen wir einige von H. Zahn<sup>1)</sup> gefundene Werte der Koeffizienten, welche, sofern sie demselben Element gehören, auch an derselben Platte bestimmt sind. Für die in dieser Arbeit von Zahn benutzte Wismutplatte I ergibt sich aus (6) ein Unterschied zwischen  $B_a$  und  $B_i$  von 0,8 Proz. und 2 Proz. bei 6300 bzw. 10600 Gauss. Die denselben Feldstärken entsprechenden Werte von  $Q_a - Q_i$  betragen nur 0,4 und 0,1 Proz. Wegen der Kleinheit von  $e_i$  dürften die Unterschiede bei anderen Elementen nicht erheblichere Werte annehmen.<sup>2)</sup> Es sei auch daran erinnert, daß (6) und (7) die maximalen Unterschiede geben.

Die Differenz zwischen den Koeffizienten der magnetischen Widerstandsänderung,  $A_i - A_a$ , wächst in der erwähnten Wismutplatte von 0,7 Proz. bei 3900 Gauss zu 3 Proz. bei 10600 Gauss. Bei Antimon, Nickel und Eisen sind die berechneten Unterschiede kleiner. Was endlich die übrigen Longitudinalkoeffizienten betrifft, erreichen die Unterschiede bei Wismut höchstens etwa 1 Proz.

Im allgemeinen dürften also die isothermen Koeffizienten sich nur um kleine Korrekturen von den adiabatischen unterscheiden. Das erleichtert wesentlich die Prüfung von einer Theorie der Effekte, denn, ohne einen größeren Fehler zu machen, dürfte man die gemessenen (angenähert adiabatischen) Effekte mit den theoretisch interessanteren, rein isothermen identifizieren können.

Nach der Theorie von Gans sollten nicht nur bei den

---

Theorie aus macht dies ja auch keine Schwierigkeiten, da diese ja schon hinsichtlich des Vorzeichens von  $P$  versagt. Ich habe diese Berechnung auch nur angestellt, um einen Anhaltspunkt für die Größenordnung  $B_a - B_i$  zu erhalten, und diese stimmt allerdings gut mit der beobachteten.“ — Die oben in § 3 dargelegte Auffassung von  $B_a$  war Hr. Zahn damals nicht bekannt.

1) H. Zahn, Ann. d. Phys. 14. p. 886. 1904.

2) In der eben zitierten Arbeit wurde der longitudinale thermomagnetische Potentialeffekt nur bei Wismut gemessen; Angaben über seine Größe in anderen Substanzen finden sich z. B. in H. Zahns Bericht im Jahrb. d. Rad. u. El. 5. p. 202—205. 1908.

Hall- und Nernsteffekten, sondern auch bei der magnetischen Widerstandsänderung die adiabatischen und isothermen Koeffizienten wesentlich verschieden sein. Aus den Gleichungen von Gans folgt nämlich:  $A_i = 1,8 A_a$ .<sup>1)</sup> Daß diese Folgerung mit der Erfahrung unvereinbar ist, hat H. Zahn<sup>2)</sup> durch einen direkten Versuch bewiesen. Es wurden nämlich beide Koeffizienten gleich gefunden, eine Tatsache, die durch unsere Beziehung erklärt wird, denn der aus dieser berechnete Unterschied liegt innerhalb der Versuchsfehler.<sup>3)</sup> Die Theorie von Gans steht zwar in vollkommener Übereinstimmung mit dieser Beziehung: durch Einsetzen der theoretischen Werte für die zur Berechnung von  $(A_a - A_i)/A_a$  nötigen Größen findet man das Resultat von Gans wieder. Der Widerspruch mit der Erfahrung und mit unserem Resultat ist also auf die mangelnde Übereinstimmung zwischen den theoretisch bzw. empirisch bestimmten Größen zurückzuführen.

§ 5. *Diskussion der Versuche von H. Zahn über die Messung des isothermen Halleffektes mit Wechselstrom.* Es erübrigt nun zu untersuchen, ob der von H. Zahn gefundene Unterschied zwischen dem Gleich- und Wechselstromwert des Hallkoeffizienten mit dem oben berechneten Unterschied zwischen  $B_a$  und  $B_i$  identifiziert werden kann.<sup>4)</sup>

Von unserem Standpunkt aus muß man erwarten, daß  $(B_a - B_i)/P$ , falls von Null verschieden, mit der Feldstärke (numerisch) wächst. Tatsächlich nimmt aber der von Zahn zwischen dem Gleich- und Wechselstromkoeffizienten gefundene Unterschied, durch  $P$  dividiert, mit wachsender Feldstärke etwas ab.<sup>5)</sup>

Wegen des in reinem Wismut negativen Vorzeichens von  $e_i$  müßte ferner — im zweiten Falle, Gleichung (6) —  $|B_a| < |B_i|$  sein, im Widerspruch mit dem Ergebnis von Zahn. Der für die größeren Feldstärken berechnete Maximalwert stimmt der Größenordnung nach mit dem von Zahn gefundenen Unter-

1) R. Gans, l. c. Gleichungen (40'), (47), p. 305 u. 307.

2) H. Zahn, Ann. d. Phys. 23. p. 142. 1907.

3) Er ist nämlich bei der betreffenden Feldstärke (4670 Gauss) 1 Proz., während die Versuchsfehler größer als 1 Proz. geschätzt wurden.

4) Unsere Berechnung dieser Größen läßt sich ohne wesentliche Veränderung auf die Zahnsche Meßanordnung übertragen.

5) Folgt aus den Angaben, Ann. d. Phys. 47. p. 71—73. 1915.

schied<sup>1)</sup>; seine Messungen konnten aber nicht den Maximalwert geben, da sich die Hallelektroden zum größten Teile im Felde befanden<sup>2)</sup>, zumal die Feldstärke, wie mir Hr. Zahn freundlichst mitgeteilt hat, nach dem Rande der Polschuhe hin etwas zunahm. Letzterer Umstand könnte eventuell einen Unterschied in dem von Zahn gefundenen Sinne bewirken. Offenbar würde diese Differenz doch höchstens die Bedeutung einer Korrektur erreichen können.

In Wasserumgebung wurde ein kleinerer Unterschied zwischen dem Gleich- und Wechselstromkoeffizienten gefunden als in Luft.<sup>3)</sup> Da aber der Effekt nur um 8—24 Proz. abnahm, während die transversale Temperaturdifferenz um 60 Proz. verkleinert wurde, dürften wohl diese Messungen nicht zu der Annahme zwingen, daß der ganze Effekt durch diese Temperaturdifferenz hervorgebracht wird. Allerdings kann man ja mit Zahn annehmen, daß die Temperaturdifferenz im Innern der Platte nur wenig an der Ausbildung gehindert wurde.

Wenn man annimmt, daß die galvano- und thermomagnetischen Erscheinungen durch den Ansatz in § 2 beschrieben werden können, dürfte man also für den Wechselstrom-Gleichstrom-Halleffekt eine andere als die von Zahn vorgeschlagene Erklärung suchen müssen. Vielleicht macht der adiabatisch-isotherme Unterschied einen Teil des von Zahn gefundenen Effektes aus. Dieser Teil wird eliminiert, wenn die Messung so vorgenommen wird, daß alle Punkte der Hallplatte und ihrer Elektroden, in denen die Temperatur durch Kommutieren des Feldes oder Stromes geändert wird, sich im konstanten Magnetfelde befinden. Denn unter diesen Bedingungen sind die adiabatischen und isothermen Hallkoeffizienten gleich.

§ 6. *Zusammenfassung.* Die Abhängigkeit der galvano- und thermomagnetischen Effekte von den Bedingungen, unter welchen sie gemessen werden, läßt sich am besten ohne Be-

1) Wegen des kleinen  $B$ -Wertes in Platte II wird der Unterschied unter Benutzung von Mittelwerten für  $P$  und  $e$  hier etwas größer als wir ihn oben geschätzt haben.

2) Vgl. die Angaben über die Plattendimensionen, l. c. p. 67 und die über die Polschuhe p. 64.

3) l. c. p. 72.

nutzung der Elektronentheorie mit Hilfe des mehr phänomenologischen Ansatzes in § 2 untersuchen. Es wurden die aus diesem Ansatz folgenden Beziehungen zwischen den adiabatischen und isothermen Koeffizienten sämtlicher Effekte angegeben und an einigen Beispielen diskutiert. Durch die Beziehung zwischen dem adiabatischen und isothermen Koeffizienten der magnetischen Widerstandsänderung wurde das Fehlen eines großen Unterschiedes dieser Koeffizienten, wie ihn die Elektronentheorie fordert, erklärt.

Der von uns berechnete adiabatische Hallkoeffizient unterscheidet sich wesentlich von dem nach R. Gans berechneten, welcher nicht den der Messung zugänglichen Effekt darstellt.

Gibt man die Richtigkeit unseres Ansatzes zu, so dürfte man für den kürzlich von H. Zahn gefundenen Unterschied zwischen dem Gleich- und Wechselstromwert des Hallkoeffizienten eine andere als die von Zahn vorgeschlagene Erklärung suchen müssen.

Lund, im Juli 1915.

(Eingegangen 22. Juli 1915.)



#### 4. Über eine neue Linienserie im Spektrum des einwertigen Heliums; von John Koch.

##### Einleitung.

Die merkwürdigen Gesetze, die von Balmer, Kayser und Runge und besonders von Rydberg in den Linienspektren vieler Elemente entdeckt worden sind, scheinen heutzutage noch größere Bedeutung zu gewinnen. Von Anfang an haben wohl diese Untersuchungen den Zweck verfolgt, die Wellenlängen (Wellenzahlen) der Serienlinien durch einfache Formeln darzustellen, ebenso wie Beziehungen zwischen den Koeffizienten der Serienformeln zu finden.

Die magnetische Zerlegung der Spektrallinien hat uns schon vor mehreren Jahren auffallende Analogien bei Linien derselben oder homologen Serie gezeigt. Für viele andere Erscheinungen, z. B. den Einfluß des Druckes oder der Selbstinduktion, ist dies sogar maßgebend.<sup>1)</sup>

Die von Stark<sup>2)</sup> neulich entdeckte elektrische Zerlegung der Spektrallinien bestätigt dies; die diffusen Serienlinien weisen eine wesentlich andere Zerlegung auf als wie die Linien anderer Serienzugehörigkeit.

Somit bilden die Rydbergschen Serien eine sehr wichtige Grundlage in der Spektralanalyse, und zwar auch für die theoretische Erforschung. Ich erinnere hier nur an die Untersuchungen von Ritz<sup>3)</sup> und von Bohr<sup>4)</sup>. Wie bekannt, hat Lord Rayleigh die Aufmerksamkeit darauf gelenkt, daß die Eigenschwingungen der Lichterreger von einem ganz

1) Vgl. H. Kayser, Handbuch der Spektroskopie 5. p. 8.

2) J. Stark, Ann. d. Phys. 43. p. 965. 1914. (Mehrere Arbeiten im Jahre 1914.)

3) W. Ritz, Physik. Zeitschr. 9. p. 521. 1908; Ann. d. Phys. 25. p. 660. 1908.

4) N. Bohr, Phil. Mag. (6) 26. p. 1, 476. 1913.



anderen Charakter sein müssen als diejenigen, die z. B. in der Mechanik oder Elektrodynamik vorkommen; im letzteren Falle treten die Schwingungszahlen in zweiter Potenz, in dem ersteren dagegen in der ersten Potenz auf. In seiner Untersuchung über magnetische Atomfelder und Serienlinien hat Ritz gewissermaßen davon Gebrauch gemacht und ist zu sehr interessanten Resultaten gekommen. Eine Fortsetzung bildet der Versuch von Bohr, die Balmersehe und die Heliumserien aus dem Rutherfordschen Atommodell abzuleiten, ein Versuch, der allerdings nicht ohne Einwände<sup>1)</sup> geblieben ist. Eine Erweiterung dieser Theorien ist ganz neulich von St. Allen<sup>2)</sup> vorgeschlagen, welche Erweiterung die Einwände gegen die Bohrsche Theorie vermeiden wollte.

Sehr wichtig und hier von besonderem Interesse ist das von Ritz eingeführte sog. Kombinationsprinzip. Ich erinnere zunächst an die Ritzsche Serienformel<sup>3)</sup>:

$$\nu = A - \frac{N}{\left(m + \alpha + \beta \frac{A - \nu}{N}\right)^2},$$

oder abgekürzt

$$\nu = A - (m, \alpha, \beta),$$

wo die Konstanten je nach ihrer Serienzugehörigkeit besondere Werte besitzen. Bildet man jetzt z. B. die Kombination:

$$\nu = (2, \alpha, \beta) - (m, \alpha, \beta), \quad m = 3, 4, 5 \dots,$$

so repräsentiert dieses Symbol eine neue Linienserie; zu bemerken ist, daß dabei keine neuen Konstanten eingeführt sind. Ritz hat das Prinzip an mehreren Spektren geprüft und bestätigt gefunden. Auf diese Weise ist die Stellung mancher Linien, die außerhalb früher bekannter Linienserien geblieben sind, aufgeklärt worden. So sind die von Bergmann gefundenen ultraroten Serien in den Spektren von K, Rb und Cs solche Kombinationsserien. Auch in dem Heliumspektrum hat Ritz eine derartige Kombinationslinie entdeckt.<sup>4)</sup>

Bei einer Untersuchung über die elektrische Zerlegung der He-Linien, die ich vorigen Sommer im Aachener Physi-

1) J. W. Nichol森, Phil. Mag. (6) 28. p. 90. 1914.

2) H. St. Allen, Phil. Mag. (6) 29. p. 40, 140, 714. 1915.

3) Es sind die Bezeichnungen von Ritz (l. c.) benutzt.

4) Vgl. F. Paschen, Jahrb. d. Rad. u. El. 8. p. 174. 1911.

kalischen Institut vorgenommen habe und deren Resultate in kurzem vorgelegt werden sollen, bin ich zufälligerweise auf eine derartige Kombinationsserie gestoßen. Unter dem Einfluß eines starken elektrischen Feldes traten nämlich in dem Heliumkanalstrahlenbündel neue Linien hervor, die zwar dem Helium zuzuschreiben sind, die aber den bekannten Linienserien nicht zugehören. Bevor ich allerdings zum Bericht über die Untersuchung übergehe, erlaube ich mir, dem Vorsteher des Instituts, Hrn. Prof. Dr. J. Stark, meinen herzlichsten Dank auszusprechen für die mir zur Verfügung gestellten Apparate und für das freundliche Interesse, das er mir entgegengebracht hat.

#### Experimentelle Anordnung.

*Lichtquelle und Spektralapparate.* Die Versuchsanordnung hatte, wie schon erwähnt, zunächst den Zweck, die Feinzerlegung der He-Linien in sehr starken elektrischen Feldern zu ermitteln. Sie ist zwar schon früher in diesen Annalen<sup>1)</sup> beschrieben worden; der Übersicht halber folgt hier eine kurze Darstellung derselben.

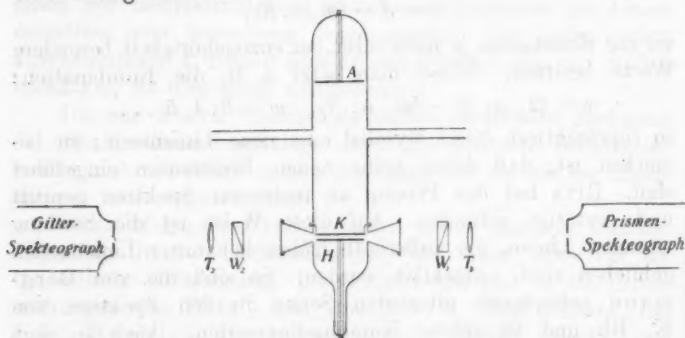


Fig. 1.

Die Lichtquelle bestand aus einem zylindrischen Kanalstrahlenrohr in der von Stark angegebenen Form (Fig. 1). *K* ist die feindurchlöchernte Kathode, *A* die Anode und *H* die Hilfselektrode; sie sind aus 2–3 mm dickem Aluminiumblech angefertigt. Die Entladungsröhre hatte eine Länge

1) J. Stark, l. c.; H. Luneland, Ann. d. Phys. 45. p. 517. 1914.

von 20–25 cm; der Abstand zwischen Kathode und Hilfselektrode betrug 1,2–2,5 mm, je nach den verschiedenen verwendeten Röhren. Durch die trichterförmigen Ansatzröhren, die einander entgegengesetzt angeblasen waren, ließen sich die Spalte der Spektralapparate beleuchten. Bei der sehr starken Inanspruchnahme der Röhre läßt sich nämlich eine verhältnismäßig kräftige Zerstäubung der Aluminiumelektroden nicht vermeiden. Besonders lästig ist die lichtabsorbierende Metallschicht, mit der die Rohrwand innenseits bald bedeckt wird; bis an die Verschlußplatten der Ansatzröhren reichte der Metallbeschlag allerdings nicht. Wie in Fig. 1 angedeutet, ist die Entladungsröhre dauernd an der Pumpe (Hg-Pumpe nach Gaede) und der Gasreservoir angeblasen.

Es wurde gleichzeitig mit zwei Spektrographen gearbeitet. Ihre Spaltröhren wurden also coaxial und einander entgegengesetzt aufgestellt; zwischen ihnen befand sich die Kanalstrahlenröhre. Von der leuchtenden Kanalstrahlenschicht zwischen  $H$  und  $K$  wurde mittels der beiden Zeissstessare  $T_1$  und  $T_2$  je ein Bild auf jeden der beiden Spektrographenspalte entworfen.  $W_1$  und  $W_2$  sind zwei Wollastonplatten.

Die Spektrographen waren für verschiedene Spektralgebiete eingestellt, um einander zu ergänzen. So war die Einstellung des Prismenspektrographen für das Gebiet  $\lambda$  3900 bis 4200 (ungf.) abgepaßt. Wegen seiner sehr großen Lichtstärke wurden jedoch Aufnahmen in Rot mit dem Prismenspektrographen gemacht. Der Gitterspektrograph beherrscht das Gebiet von  $\lambda$  4200 bis Rot.

Der Prismenspektrograph war mit einem größeren Verbundprisma ausgestattet. Sein Spaltröhrobjektiv war ein Akromat von 30 cm Brennweite und 1:6,5 Öffnungsverhältnis, sein Kameraobjektiv ein Zeissstessar (f 3,5) von 30 cm Brennweite. Bei  $\lambda$  4026 fielen auf der Platte 17,79 Å.-E. pro Millimeter.

Der Gitterspektrograph bestand aus einem Plangitter von 15000 Strichen auf den Zoll und einer geteilten Fläche von  $6,8 \times 9,9$  qcm in Verbindung mit zwei großen Tessarlinsen; die Kollimatorlinse hatte 59 cm Brennweite und 1:4,5 Öffnung. Bei  $\lambda$  4500 betrug die Dispersion 1:16,22 mm : Å.-E.

Für die Aufnahmen wurden größtenteils Agfa-Extra-Rapidplatten verwendet; für den roten Teil des Spektrums wurde eine Spektralplatte von Wratten u. Wainwright benutzt. Die Belichtungszeiten betrugen 6—24 Stunden.<sup>1)</sup>

*Elektrische Anordnung.* Als Stromquelle des Kanalstrahlenstromes wurde ein größeres Induktorium (Rotaxunterbrecher, Ventilrohr) benutzt. Zwischen der Kathode und der Hilfselektrode wurde ein starkes elektrisches Feld erzeugt, und zwar derart, daß die Kanalstrahlenteilchen in ein retardierendes Feld hineingelangen (= Gegenschaltung). Zur Herstellung dieses Spannungsfeldes stand zur Verfügung eine Schuckert'sche Hochspannungsdynamomaschine von 5000 Volt und eine Akkumulatorenbatterie von 10000 Volt, d. h. eine Gleichstromquelle von insgesamt 15000 Volt. Der negative Maschinenpol lag direkt an der geerdeten Kathode.

*Darstellung von Helium.* Die Entladungsröhre und ihre Verbindungen wurden zunächst auf elektrischem Wege mit Wasserstoff gut gereinigt. Erst nach mehrmaligem Einlassen und Auspumpen von Helium, und zwar während einer kräftigen Belastung der Röhre, konnten die Aufnahmen anfangen. Der Gasinhalt wurde während des Exponierens immer wieder erneuert.

Das He-Gas wurde bei den ersteren Versuchen nach der Methode von Stark, Fischer und Kirschbaum<sup>2)</sup> dargestellt und aus einem Vorratsgefäß in die Entladungsröhre in kleinen Mengen eingelassen. Bei den letzteren Versuchen ist das Helium durch Erhitzen von Cleveit gewonnen und durch frisch geglühte Kohle in flüssiger Luft gereinigt. Spuren von Luft werden, wie bekannt, sofort von der Röhre selbst bei der Entladung verbraucht. Auch He wird in der Röhre während des Betriebes absorbiert; der Gasinhalt gewinnt dabei an Wasserstoff. An den Photogrammen sind auch die Wasserstofflinien zu sehen, was für die Ermittlung des elektrischen Feldes vorteilhaft ist. Der Gasdruck wurde so gewählt, daß der Kathodenfall etwa 8000—10000 Volt betrug.

1) Bei diesen langwierigen Expositionen ist mir Hr. Dr. H. Kirschbaum in sehr zuvorkommender Weise behilflich gewesen, wofür ich ihm hier am herzlichsten danke.

2) J. Stark, A. Fischer u. H. Kirschbaum, Ann. d. Phys. 40. p. 499. 1913.

*Ausmessung der Platten.* In üblicher Weise ist nach der Beendigung einer Kanalstrahlenaufnahme ein Vergleichsspektrum eingeworfen; hierzu diente ein Geisslerrohr.

Es ergab sich schon aus einer okularen Besichtigung der Platten, daß wenigstens die Lage der neuen Linie bei etwa  $\lambda 405 \mu\mu$  von dem elektrischen Feld beeinflusst wurde. Die Feldstärke ist also auch für diese Untersuchung zu ermitteln, um die Wellenlänge der Linie unter sozusagen ruhigen Verhältnissen zu erhalten. Aus der angelegten Spannung und dem Abstände zwischen Kathode und Hilfselektrode läßt sich zwar das Feld berechnen. Es ist jedoch vorteilhafter, sich dabei der elektrischen Zerlegung der Wasserstofflinien  $H_\beta$  und  $H_\gamma$  zu bedienen.<sup>1)</sup> Nach Stark habe ich den Wert  $3,0 \cdot 10^{-4} \text{ \AA.-E./Volt} \times \text{cm}^{-1}$  für die intensivsten  $p$ -Komponenten von  $H_\beta$  angenommen.

#### Resultate.

*Wellenlängen der neuen Linien.* An meinem ersten Spektrogramm, das bei einer elektrischen Feldstärke von etwa 100000 Volt pro Zentimeter aufgenommen wurde, zeigte sich sofort eine fremde starke Linie bei  $\lambda 452 \mu\mu$ , die vorher im He-Spektrum nicht zu sehen war. Daß sie tatsächlich zum Helium gehört, habe ich nachgeprüft. Bei späteren Versuchen, bei denen das Kanalstrahlenrohr mit reinem Wasserstoff gefüllt war, ließ sich diese Linie nicht wahrnehmen. Wegen ihrer großen Intensität kann sie unmöglich einer Verunreinigung zugeschrieben werden. Sehr bemerkenswert ist auch, daß die Intensität der Linie von der elektrischen Feldstärke abhängig ist. Versuche mit verschiedenen Feldstärken zeigten nämlich, daß je schwächer das Feld, desto geringer die Intensität der Linie; ohne Feld fehlte die Linie vollständig. Darin liegt der Grund, weshalb sie nicht schon früher entdeckt worden ist.

Aus der mikroskopischen Ausmessung ergibt sich, daß auch die Lage der Linie ein wenig von der Feldstärke abhing. Es wurde der Abstand ( $\Delta \lambda$ ) der neuen Linie von der Linie  $\lambda 4472$  im Vergleichsspektrum gemessen. Die Resultate finden sich in der vierten Kolonne der Tab. 1; in der dritten Kolonne

1) J. Stark, Götting. Nachr. 1914.

Tabelle 1. Gitterspektrograph.

Platten-Nr.	Belichtungszeit (Stunden)	Feldstärke Volt $\times$ cm $^{-1}$	$\Delta \lambda$ Å.-E.
2b	18	88 000	47,36
4b	24	92 000	47,61
5b	13	108 000	47,64
9b	22	60 000	46,90
10b	9	29 000	46,49
11b	10	67 000	47,17

sind die entsprechenden Feldstärken aufgeführt. Wie aus der graphischen Darstellung in Fig. 2 näher hervorgeht, verschiebt sich die Linie proportional der Feldstärke; die Abstände sind als Ordinaten und die entsprechenden Feldstärken

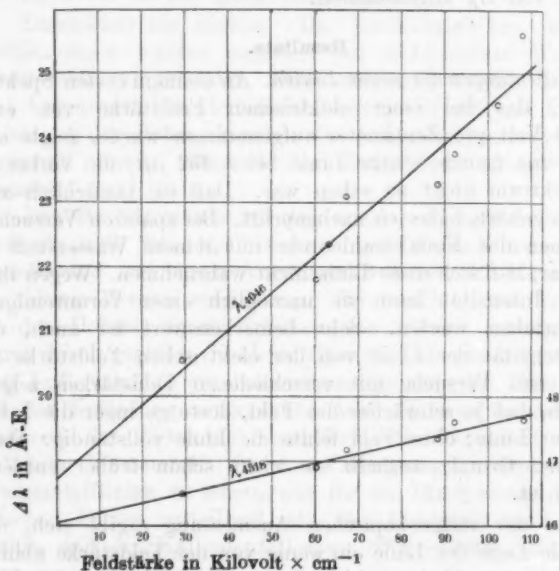


Fig. 2.

als Abszissen abgetragen. Eine Vermehrung der Feldintensität um 65 000 Volt  $\times$  cm $^{-1}$  verschiebt die Linie um 1 Å.-E. Unter ruhigen Verhältnissen würde demgemäß der Abstand 46,05 Å.-E.

betragen. Im internationalen System und auf Vakuum bezogen ist die Wellenlänge der Referenzlinie  $4472,72 \text{ \AA.-E.}$  Somit beläuft sich die Wellenlänge der neuen Linie auf  $4518,77 \text{ \AA.-E.}$

Bei  $\lambda 405 \mu$  habe ich eine zweite neue He-Linie gefunden. Ich hielt sie anfänglich für eine langwellige Komponente der Linie  $\lambda 4027$ , die in dem starken Felde sehr weit verschoben war. Allerdings entsprachen die tatsächlich beobachteten Lagenveränderungen der Linie mit der jeweiligen Feldstärke nicht den Erwartungen bei einer so weit gelegenen Komponente. Besonders aufklärend war noch eine andere Beobachtung. Bei den ersten Aufnahmen war die Kanalstrahlenröhre horizontal gestellt. Aus gewissen Gründen, die hier nicht näher zu besprechen sind, wurde bei den späteren Aufnahmen die Rohrachse in geneigte ( $45^\circ$ ) und in senkrechte Stellung gebracht. Es zeigte sich dabei, daß die Komponenten an dem einen Ende gekrümmt waren, und zwar so, daß eine äußere Komponente eine größere Krümmung besaß als eine innere. Hierüber werden a. a. O. genauere Mitteilungen gemacht; nur folgendes sei hier erwähnt. Bei der senkrechten Stellung der Röhre wird ja das leuchtende Spannungsfeld so abgebildet, daß seine Achse parallel dem Spalt steht. Jeder Punkt des Spaltes entspricht einer einzelnen Niveauebene des Spannungsfeldes; ist dort die Feldstärke der Achse entlang veränderlich, so müssen die Komponenten an den Spektrogrammen gebogene Bilder zeigen. Die gekrümmten Enden stammen aus den fast spannungsfreien Löchern der Kathode. Nun erwies sich die fragliche „Komponente“ fast gerade; ihre Krümmung war durchaus nicht derart, wie sie bei einer so weit gelegenen Komponente sein mußte. Wir haben es mit einer selbständigen Linie zu tun. Auch hier ist die Intensität der Linie von der Feldstärke abhängig, und zwar nimmt sie mit derselben ab.

Das Resultat der Ausmessungen ist in Tab. 2 zusammengestellt; analog dem Obigen bezeichnet  $\Delta \lambda$  den Abstand, und zwar von der Linie  $\lambda 4027,81$  (internationales System und auf Vakuum bezogen) im Vergleichsspektrum. Die Linienverschiebung, die übrigens in Fig. 2 graphisch dargestellt ist, beträgt  $1 \text{ \AA.-E. pro } 17000 \text{ Volt} \times \text{cm}^{-1}$ ; sie ist also in diesem Falle etwa 4mal so groß als wie bei der Linie  $\lambda 4518$ . Ohne Feld würde der Abstand  $18,71 \text{ \AA.-E.}$  betragen. Somit beläuft



Tabelle 2. Prismenspektrograph.

Platten-Nr.	Belichtungszeit (Stunden)	Feldstärke Volt $\times$ cm <sup>-1</sup>	$\Delta \lambda$ Å.-E.
1a	6	102 000	24,51
2a	18	88 000	23,30
4a	24	92 000	23,76
5a	13	108 000	25,61
8a	24	63 000	22,36
9a	22	60 000	21,81
10a	9	29 000	20,56
11a	10	67 000	23,11

sich die Wellenlänge der neuen Linie auf 4046,02 Å.-E. (int. System; Vakuum). Vielleicht ist es nicht ohne Bedeutung, zu erwähnen, daß auch die Hg-Linie 4047 an den Platten sichtbar ist.

Die beiden Linien  $\lambda$  4472 und  $\lambda$  4027 gehören zu der diffusen Nebenserie des einwertigen Heliums und haben die Gliednummern 4 bzw. 5. An ihrer langwelligen Seite haben wir, wie schon gesagt, je eine neue Linie gefunden. Es ließ sich also vermuten, daß auch das zweite Glied derselben Serie bei der Anwesenheit eines starken elektrischen Feldes von einer analogen Linie begleitet ist. Zu diesem Zweck machte ich mit dem Prismenspektrographen eine Aufnahme auf einer rotempfindlichen Platte (Spektralplatte Wratten u. Wainwright). Es zeigte sich tatsächlich eine sehr schwache Linie bei  $\lambda$  6060 Å.-E. Zuzufolge der geringen Dispersion des Prismenspektrographen an dieser Stelle ist die Wellenlänge unsicher.

*Serienzugehörigkeit der neuen Linien.* Runge u. Paschen<sup>1)</sup> haben gefunden, daß fast sämtliche von ihnen gemessenen Linien des He-Spektrums sich in sechs Serien auflösen lassen. Nur die Linie  $\lambda$  3809 blieb außerhalb der Serien und wurde Verunreinigungen zugeschrieben. Ihre richtige Stellung ist zuerst von Ritz<sup>2)</sup> ergründet worden. Sie ist nämlich eine Kombinationslinie, deren Wellenzahl der Kombination

$$[(1,5, s, \sigma) - (2, p, \pi)] + [(2, p, \pi) - (3, d, \sigma)]$$

entspricht, d. h. gleich der Summe der Wellenzahlen der Grundlinien der Prinzipalserie und der diffusen Nebenserie.

1) C. Runge u. F. Paschen, Berl. Ber. 1895.

2) W. Ritz, Physik. Zeitschr. 9. p. 521. 1908.



Diese beiden Grundlinien liegen im Ultrarot und sind von Paschen<sup>1)</sup> entdeckt worden.

Die von mir gefundenen Linien sind Differenzlinien, die aus der Grundschwingung und den folgenden Gliednummern der Prinzipalserie des einwertigen Heliums entstanden sind. Symbolisch läßt sich die neue Linienserie in der Ritzschen Form so schreiben:

$$\nu = (2, p, \pi) - (m, p, \pi), \quad m = 3, 4, 5 \dots$$

wo  $p$  und  $\pi$  die Serienkonstanten der Prinzipalserie bedeuten. Im internationalen System und auf Vakuum bezogen sind die Wellenlängen und die Wellenzahlen der fünf ersten Glieder der Prinzipalserie von He I:

$\lambda$ Å.-E.	$\nu$
10882,83	9231,198
3889,715	25708,822
3188,608	31361,695
2945,954	33944,858
2829,879	35937,197

Die Wellenzahlen der Kombinationsserie werden am einfachsten dadurch gewonnen, daß die Wellenzahl der Grundschwingung von den übrigen abgezogen wird. Die folgende Tab. 3 enthält diese Wellenzahlen und ihre entsprechenden

Tabelle 3.

$\nu$	$\lambda$ ber. Å.-E.	$\lambda$ beob. Å.-E.
16477,64	6068,85	6060
22130,50	4518,65	4518,77
24713,66	4046,30	4046,02
26106,00	3830,05	—

Wellenlängen. Vergleichshalber sind auch in der Tabelle die beobachteten Wellenlängen aufgeführt. Bei der grünen und der violetten Linie ist die Übereinstimmung zwischen den beobachteten und berechneten Werten vollständig. Die orangegelbe Linie zeigt eine größere Differenz; hier ist auch, wie schon oben erwähnt, die Genauigkeit geringer.

1) F. Paschen, Ann. d. Phys. 27. p. 537. 1908.

Für  $m = 6$  ergibt sich eine Linie im Anfang von Ultraviolett bei  $\lambda$  3830. An dieser Stelle findet sich an meinen Spektrogrammen eine schwache Linie, über die ich mir allerdings noch keine Rechenschaft ablegen kann. Es sind vielleicht in diesem Punkte neue Messungen erforderlich.

Von besonderem Interesse ist zu erwähnen, daß die beiden neuen Linien  $\lambda$  4518 und  $\lambda$  4046, an denen genaue Messungen ausgeführt sind, in hohem Maße polarisiert sind; und zwar ist die parallel zum Feld schwingende Komponente viel intensiver als die senkrecht dazu schwingende.

Im vorhergehenden ist also bei He I die Existenz einer parallel der Prinzipalserie verlaufenden Serie nachgewiesen. Die Grenze dieser Serie ist dieselbe wie die der Nebenserien des einwertigen Heliums. Ich möchte nochmals hervorheben, daß die hier besprochene Kombinationsserie gar keine neuen Konstanten enthält. In diesem Zusammenhang sei daran erinnert, daß Ritz, der die Beobachtungen von Hagenbach, Konen, Lenard und Saunders durchgesehen hat, schon bei Lithium und Natrium eine ganz analog verlaufende Serie gefunden hat. Es ist daher zu erwarten, daß auch beidem zweiwertigen Helium eine derartige Linienserie existiert. In einer folgenden Arbeit soll dies näher untersucht werden.

Gothenburg (Schweden), Juli 1915.

(Eingegangen 12. Juli 1915.)

**5. Über eine einfache Methode zur Erzeugung  
akustisch empfindlicher Leuchtgasflammen;  
von Karl L. Schaefer.**

Bekanntlich reagiert eine bei erhöhtem Drucke aus passend gewählter kleiner Öffnung brennende Leuchtgasflamme auf sehr hohe Töne oder Geräusche in der Weise, daß sie sich mehr oder weniger verkürzt und unter Umständen laut zu brausen beginnt. Die älteren Akustiker betrachteten diese eigentümliche Erscheinung mehr als ein interessantes Kuriosum; neuerdings hat aber die „empfindliche“ Flamme eine größere wissenschaftliche Bedeutung dadurch erlangt, daß sie — von N. Schmidt, Edelmann und Hegener — in das Instrumentarium zur Bestimmung sehr hoher Schwingungszahlen eingeführt worden ist.<sup>1)</sup>

Zur Herstellung des für eine genügende Empfindlichkeit der Flamme erforderlichen Gasdruckes hatte man nun bisher keine sehr befriedigende Methode. Man pflegte irgendeinen luftdichten Sack, z. B. ein Gummikissen, mit Leuchtgas aus der Hausleitung zu füllen und dann durch Gewichte zu belasten. Indessen ist bei anhaltendem Arbeiten mit einer empfindlichen Flamme das in verhältnismäßig kurzen Zwischenräumen immer aufs neue nötig werdende Füllen des Sackes

---

1) Vgl. hierzu meinen Artikel: Untersuchungsmethodik der akustischen Funktionen des Ohres, Kapitel „Schwingungszahlenbestimmung“, in Tigerstedts Handb. d. physiol. Meth. III, 1, Abt. 3, p. 304 u. 316.

zeitraubend und namentlich die oft mangelhafte Konstanz des Druckes bei subtileren Versuchen recht störend.

Ich bin daher im Verlaufe längerer, die Aichung von Galtonpfeifen betreffender Beobachtungsreihen dazu übergegangen, die Entnahme des Gases aus der Leitung sowie die Kompression desselben mittels eines Wasserstrahlgebläses zu bewerkstelligen; ein Verfahren, das sich inzwischen als ebenso einfach wie zweckmäßig bewährt hat.

Das von mir benutzte Gebläse dessen Kuppelungsendstück einfach ohne irgend welche Verschraubung mittels einer Kette

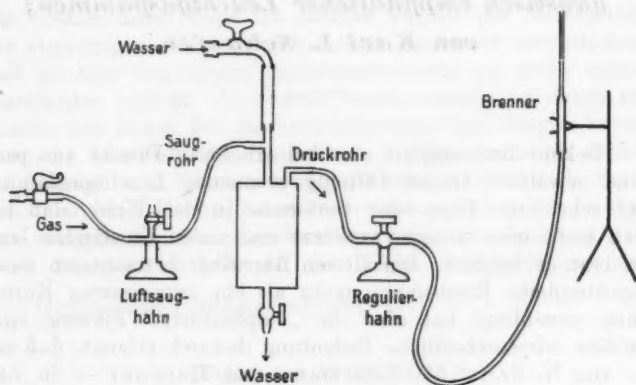


Fig. 1.

an dem Wasserhahn befestigt wird und durch Gummiverschluß wasserdicht haftet, hat einen Zinkblechkessel von 21 cm Höhe und 10 cm Durchmesser. Die lichte Weite des Saug- und des Druckrohres beträgt 5 mm, jene des Wasserabflußrohres 13 mm.

Das Saugrohr wird mit dem Gashahn, das Druckrohr mit dem Brenner durch einen Gummischlauch verbunden. Praktischen Beobachtungen zufolge ist es zweckmäßig, die zum Brenner führende Leitung recht lang zu nehmen und in ihrem Verlaufe einen Regulierhahn, mit dem sich der Gasdruck der Flamme beliebig einstellen läßt, möglichst weit

vom Brenner entfernt anzubringen. Bei raschem Zudrehen der Wasserleitung kann es vorkommen, daß Wasser in den Verbindungsschlauch von Saugrohr und Gashahn gespritzt wird. Um dies zu verhüten, empfiehlt es sich, ein T-Rohr mit Hahnauslaß dazwischen zu schalten.

Die vorstehende Fig. 1 veranschaulicht die sehr einfache Gesamtanordnung. Um sie in Tätigkeit zu setzen, verfährt man am besten so: Es wird zuerst bei noch geschlossenem Gashahn der Hahn des T-Rohres (Luftsaughahn) und hierauf der Wasserhahn maximal aufgedreht, während das Wasserabflußrohr des Gebläsekessels halb und der Regulierhahn ganz offen steht. Das Gebläse saugt dann Luft an und preßt sie aus der Brennermündung heraus. Nun dreht man die Gasleitung auf und schließt den Luftsaughahn, so daß jetzt statt der Luft Gas angesogen wird. Nach kurzer Zeit läßt sich die Flamme am Brenner entzünden, wobei zugleich der Druck durch den Regulierhahn so weit zu drosseln ist, daß die Flamme zwar ruhig brennt, aber bei der geringsten weiteren Drucksteigerung in jenen Unruhezustand übergeht, welcher dem Maximum der Empfindlichkeit entspricht. Sollen die Versuche beendet werden, so schließt man nach vorheriger Öffnung des Luftsaughahnes die Gasleitung und wartet, bis die angesogene Luft die Flamme und das Gas aus dem Kessel abgeblasen hat, worauf der Wasserhahn langsam zuge dreht wird.

Manometrische Beobachtungen zeigen, daß das Gas nicht eigentlich aus der Leitung „gesogen“ wird, vielmehr noch mit einem Überdruck von etwa 3 cm Wasser in das von mir verwendete kleine Gebläse eintritt. Sind Gashahn, Wasserleitungshahn und Regulierhahn ganz, der Wasserabflußhahn halb offen, so strömt das Gas mit einem Drucke von ungefähr 10 cm Quecksilber aus der Brenneröffnung. Mit Hilfe des Regulierhahnes läßt sich dieser Druck beliebig verkleinern. Bei 3 cm und weniger brennt die Flamme durchaus ruhig, bei ca. 3,5 cm beginnt der Unruhezustand, das Flackern, und bei höherem Drucke braust die Flamme andauernd.

Daß Wasser aus dem Kessel in das Druckrohr und in die Leitung zum Brenner gepreßt wird, wie es sonst gelegentlich bei ungenügend ausgeglichenen Druckverhältnissen im

Gebläse geschieht, kommt nicht vor, wenn die verschiedenen Hähne in der oben angegebenen Weise eingestellt werden. Aus dem abfließenden Wasser entweicht ein gewisses Quantum des mitgerissenen Gases, aber so wenig, daß es sich selbst bei stundenlangem Arbeiten mit der Flamme durchaus nicht lästig bemerkbar macht.

Physiologisches Laboratorium der Universitäts-Ohren- u. Nasen-Klinik in der Kgl. Charité zu Berlin, 29. Juli 1915.

(Eingegangen 2. August 1915.)

**6. Durchbohrung von Glas  
mit elektrischen Funken und Strahlen;  
von G. Quincke.**

(Hierzu Tafel I—III.)

§ 1. *Glas von elektrischen Funken ohne Leidener Flaschen durchbohrt*, zeigt in der Nähe des eigentlichen Funkenkanals Sprünge von denselben Formen wie dünne Schichten klebriger Flüssigkeit, ehe sie unter dem Einfluß der Oberflächenspannung — langsam bei großer Viskosität, schnell bei kleiner Viskosität — einen Gleichgewichtszustand annehmen, welcher in den dünnen Wänden von gewöhnlichem Seifenschaum lange bekannt ist. Ich habe daher die Übergangsformen Schaumwände I. Art, die Gleichgewichtsformen Schaumwände II. Art genannt. Erstarren dünne Flüssigkeitsschichten, ehe der Gleichgewichtszustand erreicht ist, so sieht man Schaumwände I. Art. Erstarren sie, nachdem der Gleichgewichtszustand erreicht ist, so sieht man Schaumwände II. Art.

Ich habe früher<sup>1)</sup> angenommen, daß die elektrische Durchbohrung von Glas und anderen Substanzen die Folge ist von ungleicher Dilatation an den verschiedenen Stellen des Isolators, indem die Sprünge an Stellen auftreten, wo schon eine Diskontinuität der Substanz und Spannung vorhanden ist. Im Glase also an den Stellen, wo sich unsichtbare dünne ölartige Schichten von Kieselsäure oder kieselsäurereichen Silikaten ausgeschieden hatten. Für diese Annahme sprach auch die Erfahrung, daß auf erstarrten Pechkuchen in der roten negativ elektrischen Staubfigur Schaumwände von Fremdstoffen als gelbe Linien hervortraten<sup>2)</sup> und nach einiger Zeit der Pechkuchen freiwillig oder durch Stoß längs diesen Schaumwänden gesprungen war.

Meine späteren Arbeiten über elektrische Staubfiguren und die Brechung elektrischer Strahlen durch isolierende und

1) G. Quincke, Wied. Ann. 10. p. 552. 1890.

2) G. Quincke, Ann. d. Phys. 32. p. 106. Taf. II. Fig. 10 b. 1910.

metallische Prismen<sup>1)</sup> beweisen, daß  $\pm$ -elektrische Emanationen eines Radiators in Glas und andere feste Körper eindringen und mit der festen Substanz elektrische Fremdstoffe, Schaumwände I. und II. Art bilden.<sup>2)</sup> Es ist also auch zu erwarten, daß bei der Durchbohrung von Glas durch die elektrischen Emanationen einer Drahtspitze oder Metallkugel zuerst im Innern des Glases unsichtbare Lamellen ölartiger Flüssigkeit entstehen, von anderer Dielektrizitätskonstante, anderem elektrischen Leitungsvermögen und mit Oberflächenspannung gegen die Umgebung, und daß diese Lamellen später zu Schaumwänden I. und II. Art erstarren, unter Änderung des Volumens und Abscheidung absorbierter Gase.

Ich werde im folgenden zeigen, daß Glas von elektrischen Funken und den Emanationen elektrischer Strahlenbüschel durchbohrt und geschmolzen wird, daß in der Tat die elektrischen Emanationen mit und in dem geschmolzenen Glas ölartige Flüssigkeit und dünne Luftschichten bilden, deren Oberfläche verschieden schnell erstarrt und unter dem Einfluß der Oberflächenspannung Schaumwände I. und II. Art bildet.

Am besten wählt man für die elektrische Durchbohrung des Glases die von Holtz<sup>3)</sup> angegebene Methode. Eine dickwandige Glasröhre von 40 mm Durchmesser und einem Hohlraum von 2 mm Durchmesser wird mit der eben geschliffenen Basis auf die Spiegelglasplatte gekittet, welche durchbohrt werden soll. Man benutzt einen gut isolierenden Kitt aus Schellack und Kanadabalsam und sorgt dafür, daß die Kittschicht möglichst dünn ist und keine Luftblasen enthält. Durch den engen Hohlraum der Glasröhre wird ein zugespitzter Stahldraht in die noch weiche Kittmasse gedrückt, so daß die Spitze die Glasplatte berührt. Der Draht und die freie Glasfläche gegenüber der Drahtspitze werden zwischen die Polkugeln einer Influenzmaschine mit rotierender Glasscheibe von 40 cm Durchmesser gebracht. Man sieht den elektrischen Funken stoßweise von der isolierten positiven Elektrode der Influenzmaschine ausgehen, im Innern des Glases auf kürzeren Strecken

1) G. Quincke, Ann. d. Phys. 43. p. 337—460. 1914.

2) G. Quincke, Ann. d. Phys. 43. p. 414. 1914.

3) W. Holtz, Pogg. Ann. 130. p. 118. 1867.



aufleuchten und wieder verschwinden, ehe die ganze Platte durchbohrt wird. Es gelingt leicht, Glasplatten von 10—20 mm Dicke zu durchbohren mit einem Funkenkanal von 0,005 bis 0,01 mm Breite, der in der Nähe der kürzesten elektrischen Kraftlinie liegt, niemals geradlinig ist, gewöhnlich Schraubendrehungen zeigt und zuweilen sich im Innern des Glases in zwei oder mehr Äste gabelt.

Statt der Polkugeln der Influenzmaschine kann man auch die Enden der sekundären Spirale eines kräftigen Induktoriums benutzen.

Du Moncel<sup>1)</sup>, welcher Glasplatten mit dem elektrischen Funken eines Induktoriums durchbohrte, sah den Funken am negativen Pol, welcher nach und nach in das Glas sich Bahn bricht. Das Glas zeigte in der Umgebung des Loches Eigenschaften der Polarisatation, ähnlich denen, welche es durch Pressung oder Härtung erlangt.

Im allgemeinen kommt in der Nähe der Funkenbahn bald positive, bald negative Doppelbrechung vor, mit optischer Achse senkrecht zur Funkenbahn oder zur kürzesten elektrischen Kraftlinie, deren Größe und Vorzeichen mit dem Abstand von der Glasoberfläche periodisch wechselt. Es ist ähnlich wie in einer Leimgallerte, in welcher bei schnellem Aufquellen in Wasser Stellen mit positiver und negativer Dilatation nebeneinander liegen und aufeinanderfolgen.

Auch ohne die Funkenbahn erscheinen dicke Gläser meistens doppeltbrechend, wenn man von der Seite parallel den polierten Flächen hindurchsieht. Wegen schlechter Kühlung zeigen die Glasplatten negative Doppelbrechung in der Mitte und positive Doppelbrechung nahe den polierten Flächen für ein Drittel der Dicke, mit optischer Achse normal zu diesen Flächen. Das Glas hat sich in der Mitte noch zusammengezogen, als es außen schon erstarrt war. Es ist parallel der Oberflächennormalen außen bleibend gedehnt, innen bleibend komprimiert.

Man kann dünne Spiegelglasstreifen, welche gut gekühlt und einfachbrechend sind, parallel den polierten Flächen mit dem elektrischen Funken durchbohren, wenn 20 Streifen Spiegelglas von 12 mm Breite und 2 mm Dicke mit den

1) Du Moncel, Dingler Journ. 149. p. 362. 1858; Fortschr. d. Phys. 14. p. 488. 1858.

polierten Flächen zusammenge kittet sind, und der dicke Glaszylinder mit der Stahlspitze auf die schmalen nebeneinanderliegenden Seitenflächen der Glasstreifen aufge kittet wird. Man kann denselben Glasstreifen an verschiedenen Stellen mit dem elektrischen Funken durchbohren. Die Funkenbahn läßt sich dann unter dem Mikroskop mit den stärksten Vergrößerungen untersuchen.

Von Holtz 1862 durchbohrte Glasstreifen von 2—8 mm Dicke (vgl. folgende Tab. I) zeigen zwischen gekreuzten Nicolischen Prismen mit einer gleichzeitig eingeschalteten Gipsplatte von  $\lambda$  zu beiden Seiten der 12 mm langen Funkenbahn bald positive, bald negative Doppelbrechung mit optischer Achse senkrecht zur Funkenbahn. Für verschiedene Glasstreifen konnte ich neben demselben Funkenkanal 16—80 Wechsel der Doppelbrechung beobachten.

Ähnliche Wechsel positiver und negativer Doppelbrechung zeigte die Umgebung der Funkenbahn in 3,2 mm dicken Streifen aus Grünenplaner Spiegelglas, welche Hr. Dr. Angenheister im Heidelberger Physikalischen Institut 1904 mit einer Doppelinfluenzmaschine ohne Leidener Flaschen durchbohrt hat.

Tabelle I.

Anzahl der Wechsel von positiver und negativer Doppelbrechung neben der Bahn elektrischer Funken in Glasplatten parallel oder normal zur Oberfläche.

Nr.	Länge mm	Breite mm	Dicke mm	Funken- länge mm	Wechsel der Doppelbrechung	Fig.
Holtzsche Glasplatten						
1	66	12	5,5	12	16 bis 29	1a
2	66	12	2	12	20 bis 30	1b
3	75	18	3	18	16	
4a	36	44	8	8	3 bis 13	
Grünenplaner Glas						
5	30	13	3,2	13	10	
7 u. 8*	30	13	3,2	13	13	
9	50	50	14	14	7	
10	53	51	28	28	5	
11*	52	52	18	18	5	

Bei den dicken Glasplatten Nr. 9—11 lag die Funkenbahn senkrecht zu den polierten Flächen. Mit 8 cm Schlag-

weite war sie ein gewundenes weißliches Band. Die Glasplatten Nr. 7, 8, 11 wurden mit einem großen Induktorium durchbohrt. Im allgemeinen findet man um so häufigeren Wechsel von positiver und negativer Doppelbrechung längs einer Funkenbahn, je dünner die Glasplatten sind.

Die 8 mm dicke Glasplatte Nr. 4a war von Holtz an 20 verschiedenen Stellen senkrecht zu den polierten Flächen durchbohrt worden. Die polierte Glasfläche zeigte in der Nähe der Funkenbahn die Polarisationsfarben eines negativen Sphärokristalles, also Kompression des Glases senkrecht zur Funkenbahn. Durch die schmale Seitenfläche der Glasplatte betrachtet, erschien die Umgebung des schraubenförmig gewundenen Funkenkanals auf größeren Strecken positiv, auf kleineren Strecken negativ doppelbrechend, mit optischer Achse senkrecht zur Funkenbahn.

*Luftblasen.* In der Mitte einer Funkenbahn liegen mit Luft gefüllte Röhren oder eine Reihe länglicher oder runder Blasen von 0,005—0,007 mm Durchmesser, einzeln nebeneinander, oder durch kurze dünnere Röhrenstücke verbunden, welche aus längeren Röhren durch Oberflächenspannung entstanden sind. Die Photographien Fig. 1 a, b (Taf. I) zeigen die Funkenbahn in den Glasplatten Nr. 1 und 2 der Tab. I in 147facher und 74facher Vergrößerung. Die meisten Blasen haben dicke dunkle Umrisse. An einzelnen Stellen fehlen die Luftblasen, oder die Funkenbahn verzweigt sich, und es liegen zwei oder drei Reihen kleinerer Luftblasen nebeneinander. Zuweilen zeigen nebeneinander liegende Luftblasen die verschiedenen Formen eines schwingenden Wassertropfens, wie sie Lenard<sup>1)</sup> photographiert hat.

*Sphärokristalle.* In der Nähe der Glasoberfläche habe ich in der Funkenbahn helle Kugeln von 0,005 mm Durchmesser beobachtet, welche zwischen gekreuzten Nicolschen Prismen ein dunkles Kreuz und mit einer gleichzeitig eingeschalteten Gipsplatte von  $\lambda$  die Polarisationsfarben eines positiven Sphärokristalles II. Klasse<sup>2)</sup> geben, als ob das Glas der Kugeln in radialer Richtung gedehnt wäre. Diese Kugeln sind ähnlich den negativen Sphärokristallen in den elektrischen

1) P. Lenard, Wied. Ann. 80. p. 232. 1887.

2) G. Quineke, Ann. d. Phys. 7. p. 739. 1902.

Kittfiguren von Holtz, welche ich früher<sup>1)</sup> beschrieben habe, zeigen aber entgegengesetzte Doppelbrechung, obwohl der Kitt aus Schellack und Kanadabalsam durch Druck negativ Doppelbrechend wird, wie Glas, mit optischer Achse parallel der Druckrichtung.

Diese positiven Sphärokristalle in Glas und negativen Sphärokristalle in Kitt, welche durch elektrische Emanationen in der Nähe der Funkenstrecke auftreten, entsprechen den positiven und negativen Sphärokristallen in wasserhaltigen Gallerten von alkalihaltiger Kieselsäure<sup>2)</sup> oder von Leimchromat<sup>3)</sup>, bei einem bestimmten Wassergehalt und bei einer bestimmten Geschwindigkeit, mit welcher der Wassergehalt sich ändert. Beide Arten Sphärokristalle bestehen aus radialen Schaumkammern (Röhren) mit unsichtbaren Wänden aus sehr klebriger Flüssigkeit, einer Lösung von Wasser und Silikat oder Leim bzw. von elektrischen Emanationen und Glas, welche bei einer bestimmten Konzentration der gelösten Substanz auftritt. Form und optische Eigenschaften der Schaumwände hängen außer von der Konzentration von der Geschwindigkeit ab, mit der die unsichtbaren Schaumwände entstehen, mit der das Wasser aus der Gallerte heraus- bzw. die elektrischen Emanationen in das Glas oder den Kitt hineindiffundieren.

*Lufthaltige Sprünge.* Zu beiden Seiten der Reihe Luftblasen liegen im Glase breite, gekrümmte oder gewundene keilförmige Sprünge, außen, an der dünnsten Stelle, von nebeneinander liegenden Kreisbogen begrenzt. Funkenkanal und Sprünge enthalten Luft und von hoher Temperatur gebräunten Kitt, ohne den sich die Glasplatten nicht mit elektrischen Funken durchbohren lassen. Der Druck der Dämpfe und elektrische Fortführung haben den Kitt auch in die feinsten Spalten getrieben. In diesen erkennt man wieder viele Reihen runder und langgestreckter Blasen nebeneinander, welche unter dem Einfluß der Oberflächenspannung parallel und senkrecht zur Funkenbahn entstanden sind. Die Blasen der äußersten Reihe sind am kleinsten, die der innersten am größten.

---

1) G. Quincke, Ann. d. Phys. 48. p. 435. 1914.

2) G. Quincke, Ann. d. Phys. 9. p. 824—826. Fig. 96. 1902.

3) G. Quincke, Ann. d. Phys. 13. p. 92—94. 1904.

Der Druck der heißen Gase hat die in weichen Kitt eingebettete Glasplatte gespalten zwischen beiden polierten Seitenflächen, wo er den größten Widerstand fand, wo die unsichtbaren Schaumwände der Glasgallerte von geringerer Dicke als  $0,12 \mu$  am stärksten gequetscht wurden, und ihre Dicke und Oberflächenspannung dadurch am kleinsten war. An diesen dünnsten Stellen mit kleinster Oberflächenspannung wurden die Schaumwände von der größeren Oberflächenspannung der dickeren Schaumwände zu beiden Seiten der gequetschten Stelle auseinandergerissen. Der Druck der Gase spaltet das Glas ähnlich wie der Druck des Diamantkeiles, mit welchem Glasplatten geschnitten werden.<sup>1)</sup> Die Kreisbogen am äußersten Rande der Spalten deuten auf einen Wechsel des Gasdruckes bei dem stoßweise eindringenden elektrischen Funken.

Die eingeschnürten Röhren und Blasen im Funkenkanal beweisen durch ihre Form, daß hier das Glas durch den elektrischen Funken kurze Zeit geschmolzen war und durch die elektrischen Kräfte elektrolysiert wurde.<sup>2)</sup>

Der Wechsel der positiven und negativen Doppelbrechung des Glases in der Nähe der Funkenbahn ist ähnlich wie in einer Leimgallerte, in welcher auch beim Aufquellen in Wasser Stellen mit positiver und negativer Dilatation nebeneinander auftreten und aufeinander folgen.<sup>3)</sup> Negative und positive Doppelbrechung oder negative und positive Dilatation werden um so stärker sein und um so langsamer verschwinden, je schneller die elektrischen dilatierenden Kräfte auftreten und je klebriger das flüssige Glas ist, welches bei schnellem Wechsel der elektrischen Kräfte im Inneren des Glases dilatiert wird — durch thermische Ausdehnung, elektrolytische Gasentwicklung und elektrischen Querdruck. Erkalte das Glas wieder schnell, so bleibt der dilatirte Zustand; die negative und positive Doppelbrechung bleiben dauernd, wie in schnell gekühltem Glas oder in schnell erstarrter Leimgallerte.<sup>4)</sup> Die Dimensionen der von den elektrischen Funken durchbohrten Glasstücke modifizieren Dilatation und Doppelbrechung be-

1) G. Quincke, *Ann. d. Phys.* **46**. p. 1030. 1915.

2) E. Warburg, *Ann. d. Phys.* **21**. p. 642. 1884.

3) G. Quincke, *Ann. d. Phys.* **14**. p. 857—885. 1904.

4) G. Quincke, *Ann. d. Phys.* **15**. p. 31. 1904.

nachbarter Stellen, wie bei schnell aufquellender Leimgallerte. Dadurch erklärt sich die Mannigfaltigkeit der positiven und negativen Doppelbrechung des Glases in der Nähe der Funkenbahn.

Außerdem quillt das Glas, wie ich im folgenden Paragraphen nachweisen werde, durch elektrische Emanationen (besonders Gasionen), welche von den Polen der Influenzmaschine ausgeschleudert werden, in das Glas eindringen, dasselbe erhitzen und schmelzen und sich im Glase durch Diffusion ausbreiten, wie Wasser in aufquellender Leimgallerte.

Auch die durch Wellenbewegungen der Interferenzstreifen nachgewiesenen Schwankungen der Lichtbrechung isolierender Flüssigkeiten in einem starken elektrischen Felde zwischen parallelen Kondensatorplatten<sup>1)</sup> deuten auf eine periodische Diffusion und Lösung elektrischer Emanationen in der isolierenden Flüssigkeit.

*Elektrischer Querdruck.* Nimmt man die elektrische Kraft oder die elektrische Potentialdifferenz  $P$  für die Länge  $a = 1$  cm der elektrischen Kraftlinie zu 100 C.G.S. elektrostatischen Einheiten und die Dielektrizitätskonstante des Glases  $K = 10$  an, so wäre normal zur kürzesten elektrischen Kraftlinie der elektrische Querdruck  $p$  im Glase in Atmosphären<sup>2)</sup>

$$p = \frac{K}{8\pi \cdot 1034 \cdot 981} \frac{P^2}{a^2} = 0,004 \text{ Atm.}$$

Dieser Querdruck ist viel zu schwach, um die beobachtete bleibende elektrische Doppelbrechung des Glases zu erklären.

Nach meiner Meinung wird bei sehr schnellem Auftreten der elektrischen Kraft oder des elektrischen Funkens die elektrische Spannung  $P$  nicht längs der ganzen Strecke  $D$  der  $D$  mm dicken Glasplatte zwischen beiden Polen langsam auf Null fallen, sondern schon auf einer kleinen Strecke im Abstand  $a = D/n$  von der Polkugel den Wert Null erreichen. Dann würde,  $n = 40$  angenommen, der elektrische Querdruck 1600mal größer sein, als oben ausgerechnet wurde, oder rund

1) G. Quincke, Wied. Ann. 19. p. 774. 1883.

1) G. Quincke, Wied. Ann. 19. p. 775. 1883.

6,4 Atm. betragen. Der elektrische Querdruk wäre proportional  $n^2 P^2/D^2$  und um so größer, je schneller die elektrische Spannung oder elektrische Kraft an der elektrisierten Metallspitze auftritt.

Diese Auffassung wird dadurch unterstützt, daß man den elektrischen Funken stoßweise im Innern des Glases auf kürzeren Strecken aufleuchten und wieder verschwinden sieht, ehe die ganze Platte durchbohrt ist.

§ 2. *Glas von elektrischen Flaschenfunken durchbohrt.* Die keilförmigen mit Luft gefüllten Sprünge, welche von der Funkenbahn ausgehen, werden größer, wenn man die einzelnen Entladungen zwischen den Polen der Influenzmaschine vergrößert, indem man an die Pole der Influenzmaschine die inneren Belegungen zweier kleiner Leidener Flaschen von 0,0003 Mikrofarad Kapazität anlegt, deren äußere Belegungen metallisch verbunden sind (vgl. Fig. 2).

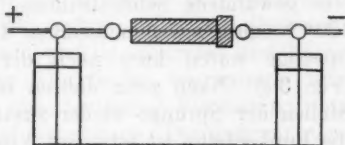


Fig. 2.

Tabelle II.

Dicke quadratische Spiegelglasplatten durch elektrische Funken von Leidener Flaschen durchbohrt.

Nr.	Länge mm	Breite mm	Dicke mm	Fig.
12	49	50	14	3 a b
13	51	51	14	3 c d g h
14	42	37	18	3 e f; 4 a b
15	48	49	11	5 a b
16	56	58	14	6
17	52	55	14	

Tab. II gibt die Dimensionen, Figg. 3—6 (Taf. I) die Photographien dicker quadratischer Glasplatten, welche in dieser Weise von elektrischen Flaschenfunken normal zur polierten Oberfläche durchbohrt waren. Fig. 3 a, e zeigt die Glasplatten Nr. 12 und 14 in der Richtung der Normalen gesehen, Fig. 3 b, f von der Seite gesehen. Die Sprünge liegen oft in derselben Ebene zu beiden Seiten der weißlichen Funkenbahn, oder



drei Sprünge stoßen in der Funkenbahn mit  $120^\circ$  Neigung zusammen, wie drei Schaumwände von Seifenschaum in einer Schaumkante. Die Sprünge sind eben, schwach gewölbt oder windschief, wie die Flügel einer Schiffsschraube, und am äußeren Rande von Kreisbogen begrenzt.

Fig. 3 c (Taf. I) ist kurz nach elektrischer Durchbohrung der Glasplatte Nr. 13, Fig. 3 d zehn Jahre später photographiert. Ein- und Austrittsstelle der Flaschenfunken liegen nicht auf derselben Oberflächennormale und sind seitlich gegeneinander um 7 mm verschoben. Die Funkenbahn bildet eine gewundene Schraubenlinie, in welcher drei Sprünge mit  $120^\circ$  Neigung zusammenstoßen. Die von Kreisbogen begrenzten Sprünge waren kurz nach der Durchbohrung 6 mm lang (Fig. 3 c). Nach zehn Jahren ist das Glas an den dünnsten Stellen der Sprünge wieder zusammengeflossen (Fig. 3 d) und die Funkenbahn ist jetzt mit 3 mm langen, schwach gewölbten und von kleinen Kreisbogen begrenzten Sprüngen besetzt, von denen je vier oder fünf in den drei gewundenen Schraubenflächen liegen, welche in der Funkenbahn mit  $120^\circ$  Neigung zusammenstoßen. Es ist, als ob ein Baumzweig in drei gleich gegeneinander geneigten Ebenen mit Blättern besetzt und das obere gegen das untere Zweigende um  $90^\circ$  verdreht wäre.

In der Glasplatte Nr. 13 geht von der Eintrittsstelle der weißlichen Funkenbahn mit den großen Sprüngen noch eine feine dunkle (in der Photographie Fig. 3 d nicht sichtbare) Funkenbahn nach oben, die sich wieder in zwei 0,003 mm breite Äste gabelt, mit starken Schraubenwindungen. An dieser feinen Funkenbahn hängen, mit Neigungswinkeln von  $120^\circ$ , drei von Kreisbogen begrenzte Sprünge, welche wie eine Wendeltreppe gewunden und am äußersten Rande mit dunklem Kitt gefüllt sind (Fig. 3 g, h).

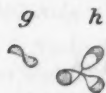


Fig. 3.

Die Lage dieser unter  $120^\circ$  gegeneinander geneigten Sprünge ist durch die Bahn der ersten elektrischen Funken orientiert, und nicht bestimmt durch schon vorher im Glase vorhandene unsichtbare Schaumwände aus heterogener Substanz mit anderer Dielektrizitätskonstante als die übrige Glasmasse.

Mit passend reflektiertem Licht zeigen in allen quadratischen Glasplatten Nr. 12, 13 und 14 die großen Sprünge



zwei bis drei Newtonsche Farbenringe parallel dem äußeren Rande. Die Sprünge sind also keilförmig. Die größte Luftdicke nahe der Funkenbahn beträgt etwa  $0,1 \mu$ . Der schwarze Ring liegt nicht am Rande des Sprunges, sondern bei den verschiedenen Sprüngen  $0,2-1$  mm vom Rande entfernt. Die Oberflächenspannung des flüssigen Glases hat die Schneide des Spaltes gerundet und hier die keilförmige Luftschicht verdickt.

*Fächer oder Brocken mit konkaver Oberfläche.* Eine matte vertiefte Stelle auf der polierten Oberfläche der quadratischen Glasplatte Nr. 14, neben der Eintrittsstelle der elektrischen Funken, zeigt unter dem Mikroskop mit Opakilluminator Sprünge, welche sich meist rechtwinklig schneiden und Fächer oder Brocken mit konkaver Oberfläche begrenzen. Beim Heben des Mikroskoprohres aus deutlicher Einstellung zeigt jedes Fach ein Bild der Beleuchtungslampe. Die rechtwinkligen Sprünge zwischen den Fächern sind nahe der Oberfläche breiter, als im Innern des Glases und haben die oberen Ränder der Fächer hochgebogen. Fig. 4a, b (Taf. I) geben Photographien derselben matten Stelle des Glases mit reflektiertem oder durchgehendem Licht in 63facher Vergrößerung. Viele Fächer erscheinen im reflektierten Licht dunkel, im durchgehenden hell und zeigen spiralförmige Gruben. Die starken Flaschenfunken haben unter der Oberfläche dieser Fächer spiralförmige mit Luft gefüllte Sprünge gebildet und die Kuppen der Fächer abgeschleudert.

Die Kittmenge in den lufthaltigen Sprüngen neben der Funkenbahn wird geringer, wenn man zuerst die Glasstücke Nr. 15, 16 und 17 mit aufge kitteter Glasröhre und Stahlspitze zwischen die Polkugeln der Influenzmaschine ohne Leidener Flasche mit dem elektrischen Funken durchbohrt, den Stahldraht mit aufge kitteter Glasröhre und den Kitt von der Glasoberfläche entfernt und dann die Enden des engen Funkenkanales zwischen die mit den Leidener Flaschen verbundenen Polkugeln der Influenzmaschine bringt.

*Große wellenförmige Bruchflächen.* Die quadratischen, dicken Glasplatten Nr. 15, 16 und 17 wurden von den Flaschenfunken durch große Sprünge normal zur polierten Oberfläche in zwei oder drei Teile gespalten. Die Bruchflächen waren bei Glas Nr. 15 nahezu eben, bei Nr. 16 windschiefe Flächen, bei

Nr. 17 eine Zylinderfläche und eine darauf senkrechte ebene Fläche. Figg. 5a und 6 (Taf. I) zeigen die Bruchflächen von Glas Nr. 15 und 16, deren beide Hälften so übereinander gelegt sind, daß die unteren Enden der Funkenbahn sich berühren. In jeder Figur liegen also unter den Erhebungen der oberen Bruchfläche die Vertiefungen der unteren Bruchfläche. Bei der Durchbohrung von Glas Nr. 15 hatten die beiden Leidener Flaschen achtmal größere Kapazität als bei den anderen quadratischen Platten.

Auf den Bruchflächen von Glas Nr. 15 und 16 sieht man von der Funkenbahn nach beiden Seiten Wellenberge und Wellentäler ausgehen, welche allmählich flacher und breiter werden.

*Sprünge in Form von Halbkugeln, Zylindern, Kegeln, Schrauben, Spiralen und Spiralbändern.* Mit dem Mikroskop erkennt man auf den großen Bruchflächen, senkrecht zur Funkenbahn, kegelförmige Sprünge und Spiralsprünge, wie eine gewundene Schraubenfläche, oder wie die Oberfläche einer kegelförmigen Schraube oder wie ein Spiralband (wie eine in die Länge gezogene schmale Papierrolle).

Auf den mit großen Flaschenfunken gespaltenen Bruchflächen von Glas Nr. 15 liegen zwei Spiralbänder von 7 mm Länge mit 16 Windungen von 3,3–0,4 mm Durchmesser; auf den mit kleinen Flaschenfunken gespaltenen Bruchflächen von Glas Nr. 16 liegen drei und fünf Spiralen von 3,1 mm Länge und zwölf Windungen, deren Durchmesser von 1,3 und 1,6 mm mit Entfernung von der Funkenbahn abnimmt. Die Bruchflächen von großen Flaschenfunken zeigen weniger, aber größere Spiralsprünge als die Bruchflächen von kleineren Flaschenfunken.

Zahlreiche ähnliche Sprünge sieht man mit Mikroskop und Opakilluminator im durchgehenden und reflektierten Licht im Innern des Glases auf und neben den weißlichen Funkenbahnen von Glas Nr. 15, 16 und 17. Die Sprünge haben die Form von Halbkugeln, geraden und gewundenen Kegelflächen, Schraubenflächen oder Schrauben; die Form von Papierstreifen, welche an zwei gegenüberliegenden Seiten am Rande aufgebogen oder zu Zylindern, offenen oder spitzen Kegeln zusammengerollt sind, oder welche ein Spiralband bilden, wie ein aufgerolltes und dann in die Länge gezogenes

Papierband mit drei, vier und mehr Windungen. Die Spiralbänder liegen auf Zylinder- oder Kegelflächen, auf Halbkugeln oder auf einzelnen oder aneinander hängenden Kugelflächen.

In Textfig. 7 *a—r* habe ich verschiedene Formen von Spiralbändern und luftgefüllten Sprüngen abgebildet und die Lage der Funkenbahn durch punktierte Linien angedeutet.

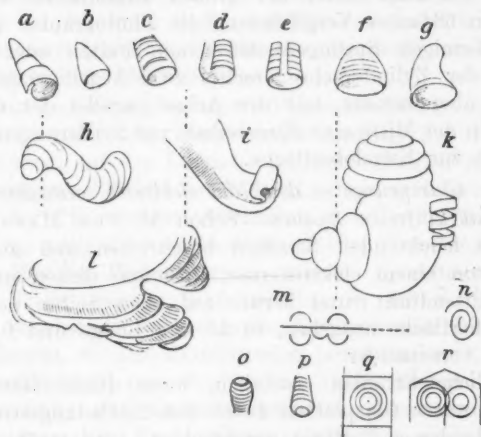


Fig. 7.

Man findet dieselben Spiralbänder und Sprünge wieder in den Photographien von Glasplatten mit elektrisch zerstäubtem Platindraht unten § 3 (Taf. II, Fig. 11, I—VI).

Zuweilen ist die Achse des Kegels, der Schraube oder des Spiralbandes wieder eine gewundene Schraube, deren Anfang senkrecht zur Funkenbahn steht, oder die Schraube ist durch einen ebenen Sprung parallel der Schraubenachse gespalten, und man sieht auf der Spaltfläche die Querschnitte der einzelnen Schraubenwindungen, wie bei einem Gewindebohrer.

In der Mitte der Funkenbahn von *Glas Nr. 15* sieht man mit Opakilluminator viele weißliche, mit Schaummassen gefüllte Sprünge, welche sich rechtwinklig schneiden, unter  $45^\circ$  gegen die Funkenbahn geneigt sind und Brocken von 0,06 bis 0,08 mm Breite mit konkaver Oberfläche begrenzen, ähnlich wie bei *Glas Nr. 14* (Taf. I, Fig. 4 *a b*). In den einzelnen Brocken

liegen Spiralsprünge oder kegelförmige Sprünge mit vier oder fünf Newtonschen Farbenringen. Ähnliche Sprünge liegen auch unter der großen Bruchfläche im Inneren des Glases und laufen in verschiedenen Richtungen durcheinander, oft mit normal gekreuzten Achsen der Kegel, Spiralen und Spiralbänder.

Fig. 5 b zeigt unter der großen Bruchfläche von Glas Nr. 15 in 63facher Vergrößerung die Photographie von zwei zylinderförmigen Sprüngen mit feinen Falten oder Spalten parallel der Zylinderachse; rechts zwei kegelförmige Spiralsprünge übereinander, mit der Achse parallel der Glasoberfläche. In der Mitte eine Kugelschale mit keilförmigen Spalten senkrecht zur Kugeloberfläche.

§ 3. *Glassprünge in der Nähe elektrisch zerstäubter Metalldrähte mit kittfreien Spalten.* Schon M. van Marum<sup>1)</sup> hat 1786 die leuchtenden Strahlen beschrieben und abgebildet, welche von einem elektrisierten, 0,25 mm dicken und 63 mm langen Eisendraht rund herum auf allen Seiten normal zu seiner Oberfläche ausgehen, in 25 mm Länge und 0,635 mm Abstand voneinander.

Ähnliche Strahlen entstehen, wenn dünne Metalldrähte auf oder unter Glasplatten durch den Entladungsstrom einer großen Leidener Batterie geschmolzen, verdampft und zerstäubt werden. Diese Strahlen durchdringen und spalten das Glas. Das Metall lagert sich nahe der Berührungslinie des Drahtes in dünnen, undurchsichtigen Schichten auf das Glas und bildet unter günstigen Bedingungen die schon von M. Toeppler<sup>2)</sup> beschriebenen und von F. Braun<sup>3)</sup> in ihren optischen Eigenschaften untersuchten Zerstäubungsgitter mit parallelen, spitz auslaufenden Metallstreifen senkrecht zur Drahtachse.

Hr. Dr. Angenheister und ich haben 1904 diese Versuche von F. Braun wiederholt. Eine sehr große Leidener Batterie von 0,05 Mikrofarad Kapazität wurde bis zu Schlagweiten von 5–10 mm geladen, durch einen geraden Platindraht von 0,04 mm Dicke und 20–30 mm Länge zwischen

1) M. van Marum, Beschreibung einer ungemein großen Elektrisiermaschine. Leipzig 1786. 4<sup>o</sup>. I. p. 9. Taf. III.

2) M. Toeppler, Wied. Ann. 65. p. 874. 1898.

3) F. Braun, Berl. Akad. Sitzungsber. 1904. p. 158; Ann. d. Phys. 16. p. 238. 1905.

die dicken Metallklemmen auf einem Objektträger von 1–1,5 mm Dicke entladen und der Draht zerstäubt. Ein Kupferstreifen verband die innere Belegung der Leidener Batterie mit der Funkenstrecke und dem dahinter geschalteten Platindraht, von dessen Ende ein zweiter Kupferstreifen zur äußeren geerdeten Belegung der Batterie führte. Beim Abklingen der elektrischen Schwingungen des Entladungsstromes wechselt periodisch an derselben Stelle des Platindrahtes die  $\pm$ -elektrische Spannung und die elektrische Strahlung seiner Oberfläche während der Zerstäubung.

Die auf dem Glas abgelagerte Platinschicht war am Rande durchsichtig, nahe dem Draht undurchsichtig, auf der Glasseite glänzend, auf der Luftseite an vielen Stellen rauh oder von schwarzem Platinmohr bedeckt. Die optischen Eigenschaften der Platinschicht wechselten bei den verschiedenen Präparaten, auch an verschiedenen Stellen derselben Platinschicht. Manche Platinschichten zeigten Zerstäubungsgitter mit parallelen, spitzen Metallstreifen in 0,014–0,022 mm Abstand voneinander, absorbierten durchgehendes Licht, welches senkrecht zu den Metallstreifen polarisiert war, wie die Zerstäubungsgitter von F. Braun, oder zeigten negative Doppelbrechung und änderten zwischen gekreuzten Nicolischen Prismen die Farbe einer gleichzeitig eingeschalteten Gipsplatte von  $\lambda$  wie eine dünne, optisch negative Kristallplatte mit optischer Achse parallel den Gitterstreifen.

Wurde ein Deckglas oder eine dickere Glasplatte über den Platindraht auf den Objektträger gelegt, so setzte sich das zerstäubte Platin an den Glasflächen über und unter dem Draht in ähnlicher Weise als dünne Platinschicht an. Das Deckglas mußte dabei am Rande durch einen gummierten Papierstreifen auf dem Objektträger befestigt sein, um nicht bei der Batterieentladung fortgeschleudert zu werden.

Die mit dem Platin bedeckte Glasoberfläche ist nahe dem Draht von vielen feinen Sprüngen durchzogen, welche sich unter rechten Winkeln treffen und meist senkrecht zur Oberfläche und  $\perp$  oder  $\neq$  zum Draht liegen. Das Glas zeigt in der Nähe der Sprünge bald schwache, bald stärkere negative Doppelbrechung mit optischer Achse senkrecht zur Sprungrichtung, ist also in dieser Richtung bald schwach, bald stärker komprimiert.

Die rechten Winkel der Sprünge fehlen, und die Sprünge liegen weiter auseinander, nahe den Enden des dünnen Drahtes, wenn die normale elektrische Ausstrahlung seiner Oberfläche durch die benachbarten dicken Metallklemmen gestört war, oder wenn sich auf dem wegen der Selbstinduktion an der Oberfläche geschmolzenen Drahte vor der Strahlung durch die Wirkung der Oberflächenspannung einzelne runde Tropfen nebeneinander gebildet hatten.

Die Sprünge enthalten Luft oder weißliche Schaummassen.

Bei stärkeren Ladungen der Leidener Batterie durchbrach und spaltete ein langer, gerader oder wellenförmiger Sprung unter dem Platindraht die Glasplatte. Dieser Sprung fehlte, wenn der U-förmig gebogene Draht die obere und untere Fläche des Objektträgers in zwei parallelen, übereinander liegenden Hälften berührte.

Legt man den Objektträger oder das Deckglas mit der Platinschicht nach oben unter ein Mikroskop mit Opakilluminator, so sieht man in senkrecht reflektiertem Licht auf den von feinen Spalten begrenzten Fächern kleine Kugeln von 0,0001 mm Durchmesser. Beim Heben des Mikroskopes erscheint über jedem Fach ein Bild der Beleuchtungslampe. Die Oberfläche der einzelnen Fächer ist also konkav; die Spalten sind keilförmig, oben dicker als unten.

Mit der Platinschicht nach unten muß man das Mikroskop nach Einstellung auf die Platinschicht senken, um umgekehrte Bilder der Beleuchtungslampe über den einzelnen Fächern zu erhalten. Die Oberfläche der Fächer ist nach der Glasseite konvex (Fig. 8).

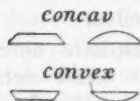


Fig. 8.

Einzelne Sprünge liegen nicht senkrecht zur Glasoberfläche und zeigen dann fünf Newtonsche Farbenstreifen mit größter Luftdicke nahe der Platinschicht.

Fig. 9 (Taf. I) zeigt die Sprünge in einem Deckglas von 0,116 mm Dicke, mit der Platinschicht nach unten, im Mikroskop mit reflektiertem Licht in 63facher Vergrößerung. Am unteren Rande der Photographie ist das Deckglas über dem Platindraht durch einen langen, nahezu ebenen Sprung gespalten worden. In jedem einzelnen der von feinen rechtwinkligen Sprüngen  $\perp$  und  $\nmid$  dem Platindraht begrenzten Fächern liegen spiralförmige oder kegelförmige Sprünge von

der Form eines zusammengerollten Papierblattes (oder einer Halbkugel) mit vier bis sieben Newtonschen Farbenringen, deren Abstand nach dem spitzen Ende des Kegels kleiner wird. Der schwarze Newtonsche Ring oder die dünnste Stelle der Luftschicht ist, wie bei den Sprüngen in den dicken quadratischen Glasplatten (Fig. 8 a c), etwas entfernt vom Rande der Sprünge. Das spitze geschlossene oder offene Ende des geschlossenen oder an der Seite offenen Kegelmantels liegt an der Platinschicht. Hier hat die Luftschicht in dem Sprung die größte Dicke bis zu 0,002 mm. Die Achse des Kegels ist senkrecht oder schief zur unteren Fläche der Glasplatte. In einzelnen Fächern schneidet der offene Kegelmantel die obere Fläche des Deckglases in einem Halbkreis von 0,04 bis 0,08 mm Durchmesser.

Die Fächer mit Spiralsprüngen in Fig. 9 gleichen den Fächern mit Spiralsprüngen an der Oberfläche dicker, von Flaschenfunken durchbohrter Glasplatten (Fig. 4 a b). Ähnliche Spiralsprünge als Kerne von einzelnen mit rechtwinkligen Sprüngen begrenzten Fächern in dünnen auf Glas eingetrockneten Schichten von Eiweiß, Kieselsäure oder Eisenoxydhydrat, habe ich früher beschrieben und durch Oberflächenspannung erklärt.<sup>1)</sup>

Dickere Glasplatten zeigen gerade, rechtwinklige Sprünge senkrecht zur Oberfläche und mit Luft gefüllte, kugel- oder kegelförmige Sprünge von ähnlicher Form wie das dünne Deckglas.

Ein Objektträger von 1,4 mm Dicke, auf welchem ein 29 mm langer Platindraht zerstäubt worden war, zeigte unter der Platinschicht, besonders nahe den beiden Drahtenden, parallele gerade Sprünge in 0,08—0,04 mm Abstand voneinander,  $\perp$  und  $\parallel$  zur Drahtrichtung. Diese Sprünge begrenzten Fächer mit konkaver Oberfläche, wie die rechtwinkligen Fächer in dem dünnen Deckglas (Fig. 9). Im Mikroskop mit Opakilluminator von der Glasseite aus betrachtet, zeigte jedes Fach im reflektierten Licht eine konvexe Oberfläche und im Innern Sprünge mit drei bis sieben Newtonschen Farbenringen auf Kugel-, Zylinder- oder Kegel-

1) G. Quincke, Ann. d. Phys. 10. p. 501. Fig. 125. 1903; 9. p. 828. Fig. 99; p. 971. Fig. 103. 1902.



flächen, oder gewundene Spiralbänder, wie ein Hobelspan mit einer bis drei Windungen. Die Achsen der lufthaltigen Sprünge und Spiralbänder lagen  $\mp$  oder  $\perp$  oder schief zur Glasoberfläche, zuweilen senkrecht zueinander. Der Abstand der Newtonschen Farbenringe nahm ab und die Luftdicke zu nach der Seite der Platinschicht. In einzelnen Fächern war über dem Sprung oder dem Spiralband die Kuppe ganz oder teilweise abgeschleudert und erschien an dieser Stelle dunkel.

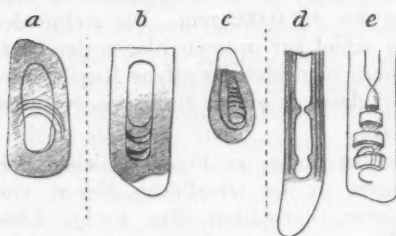


Fig. 10.

In Fig. 10 a-e habe ich einige Fächer gezeichnet. In Fig. 10 a c c liegen Newtonsche Farbenringe auf einer Kugelfläche und einem kegelförmigen Spiralband mit anderthalb und vier Windungen. Fig. 10 b zeigt einen Halbzyylinder mit kugelförmigen Enden und Querwänden. In Fig. 10 d hat die innerste von drei Spiralwindungen eine Zylinderfläche mit einer Einschnürung gebildet.

Mit durchgehendem Licht sind nur Spuren von Newtonschen Ringen oder einzelne lichte Halbkreise in der dunklen Platinschicht zu sehen.

Auf Taf. II (Fig. 11, I-VI) sind in 63-74facher Vergrößerung mit senkrecht reflektiertem Licht die Sprünge photographiert, welche ein horizontaler Platindraht von 19 mm Länge und 0,04 mm Durchmesser bei der Zerstäubung auf einer 1,364 mm dicken Glasplatte längs einer 6 mm langen Strecke gebildet hatte im Innern des Glases über der Platinschicht auf der unteren Seite der Glasplatte. Die Verschiedenheit der sechs Photographien beweist die Verschiedenheit der elektrischen Strahlung an sechs nahe beieinander liegenden Stellen des Platindrahtes, welcher durch die abklingenden elektrischen Schwingungen des Entladungstromes der großen, bis zu 1 cm Schlagweite geladenen Leidener Batterie zerstäubt wurde. In Fig. 11 I war das Ende des Platindrahtes durch die benachbarte dicke Metallklemme stark abgekühlt.

In Fig. 11, I und II, begrenzen wie in Fig. 9 Taf. I feine,



keilförmige und nahezu geradlinige Sprünge senkrecht zur Glasoberfläche und  $\perp$  oder  $\mp$  zum Platindraht langgestreckte oder rechtwinklige Fächer. Diese Fächer bilden eine 0,5 mm breite Zone neben dem Platindraht, auf einer Strecke von 1,4 mm Länge. Aber statt des kegelförmigen Sprunges mit Newtonschen Farbenringen im Innern der einzelnen Fächer bei dem dünnen Deckglas sind jetzt bei der dickeren Glasplatte in der konkaven Oberfläche der einzelnen Fächer viele Platinkugeln von 0,006–0,008 mm Durchmesser oder schwarze Körnchen von 0,0005 mm eingeschmolzen.

Daneben, in Fig. 11 III, sind geradlinige Sprünge unter  $\pm 45^\circ$  gegen den Platindraht geneigt und begrenzen Fächer mit lufthaltigen, kegelförmigen Sprüngen und Newtonschen Farbenringen, oder mit Spiralbändern ohne Farbenringe im unteren oder mit eingeschmolzenen Platinkugeln im oberen Teile der Photographie. Die lufthaltigen Sprünge waren an einzelnen Stellen 0,013 mm tief in das Glas eingedrungen.

Die Achse großer kegelförmiger Spiralsprünge mit Newtonschen Farbenringen ist senkrecht oder unter  $45^\circ$  geneigt zur Platinschicht (Fig. 11, II A, I A). In Fig. 11, V A B kreuzen sich kegelförmige Sprünge mit schief, in Fig. 11, IV A B, mit senkrecht gegeneinander geneigten Achsen. Auf gewölbten Sprungflächen, wie Fig. 11, IV A, liegen feine Furchen oder Falten senkrecht zu den Farbenringen. Fig. 11, V D, zeigt Newtonsche Farbenringe auf einem Kugelsprung.

Schöne gewundene Spiralbänder ohne Newtonsche Farbenringe liegen auf einem Kegelmantel in Fig. 11, III B B<sub>1</sub>; VI B. Zwei ähnliche Spiralbänder mit gekreuzten Achsen in Fig. 11, VI C.

An einzelnen Stellen liegen die Achsen mehrerer kegelförmiger Sprünge mit Farbenringen parallel (Fig. 11, I B; II E) oder in einem Kranze auf einem Kegelmantel und gehen radial von einem Strahlungszentrum aus (Fig. 11, IV C C; V C). In Fig. 11, VI A, zeigen kegelförmige Spiralbänder ohne Farbenringe dieselbe Anordnung.

Diese durch die Strahlung elektrischer Emanationen des zerstäubten Platindrahtes entstandenen und radial angeordneten kegelförmigen Sprünge oder Spiralbänder haben dieselbe Struktur wie die Sphärokristalle I., II. und III. Klasse,

bei denen kegelförmige Schaumwände strahlenförmig von einer Kernblase ausgehen.<sup>1)</sup>

Die Spiralbänder der Photographie Fig. 11, VI C, haben sich 6 Monate nach dem Photographieren in kegelförmige Sprünge mit Newtonschen Farbenringen verwandelt.

Glasplatten mit elektrisch zerstäubten dünnen Drähten aus verschiedenen Metallen, welche Hr. Prof. Ferd. Braun in Straßburg bei seinen oben erwähnten Arbeiten über Zerstäubungsgitter benutzt und mir gütigst geliehen hat, zeigen ähnliche Kugel- und Kegelsprünge mit drei bis fünf Newtonschen Farbenringen wie meine Photographien Figg. 9 Taf. I und 11, Taf. II.

In allen von mir und Hrn. Prof. F. Braun untersuchten Glasplatten mit elektrisch zerstäubtem Metalldraht hatten die von rechtwinkligen Sprüngen begrenzten Fächer oder Brocken eine nach der Metallschicht konkave Oberfläche und in den kugeligen, zylindrischen und kegelförmigen Sprüngen mit Newtonschen Farbenringen war das dickere Ende der keilförmigen Luftschicht und das spitze Ende des Kegels der Metallschicht zugewandt.

Ausnahmsweise nahm einmal bei einem zylindrischen Sprünge die Luftdicke nach der Seite der Platinschicht ab, und bei einer anderen Glasplatte war die Oberfläche der rechtwinkligen Fächer konvex. Diese Ausnahmen mögen von rückläufigen Strahlen herrühren, welche ich mit elektrischen Staubfiguren und isolierenden Zwischenplatten nachgewiesen habe.<sup>2)</sup>

§ 4. *Leidener Flaschen von Telefunken durchbohrt.* Das Glas von Leidener Flaschen, durch deren Seitenwand und Boden bei den schnellen Schwingungen der drahtlosen Telegraphie elektrische Funken geschlagen sind, zeigt glatte und wellenförmige oder verästelte, mit weißen Schaummassen gefüllte Sprünge, Schaumkammern I. und II. Art, von ähnlichen Formen, wie sie in § 2 und 3 beschrieben wurden. Die feinen Sprünge in der Nähe einer Durchbohrung oder eines Funkenkanales sind aber durch das stark erhitze Klebemittel der Stanniolbelegung braun gefärbt oder mit Luft gefüllt.

1) G. Quincke, Ann. d. Phys. 7. p. 737. 1902; 26. p. 688. 1908,

2) G. Quincke, Ann. d. Phys. 82. p. 893ff. Taf. III. Fig. 20ab. 23. 1910.

Figg. 12—18 (Taf. III) zeigen die Sprünge in Seitenwand und Boden einer Leidener Flasche, welche im Juni 1904 auf dem Dampfer Meteor der Hamburg-Amerika-Linie von den elektrischen Funken der drahtlosen Telegraphie mit einer Wellenlänge von 350 m und 857000 Schwingungen in der Sekunde durchbohrt war und mir von Hrn. von Lepel gütigst zur Verfügung gestellt wurde. Die teilweise geschmolzene Stanniolbelegung wurde entfernt, die Glasoberfläche an einzelnen Stellen mit konzentrierter Schwefelsäure, Salpetersäure und Salzsäure gereinigt, mit Wasser abgewaschen und getrocknet.

Große luftgefüllte Sprünge durchbrechen die Glaswand senkrecht zur Oberfläche, gehen aus von den Funkenstrecken in der Seitenwand (Fig. 12, Taf. III) und in dem Boden (Fig. 13, Taf. III) der Leidener Flasche und begrenzen große Glasstücke mit glatten, zickzack- und wellenförmigen Bruchflächen. Nahe der Funkenstrecke in der Seitenwand und im Boden der Leidener Flasche erscheinen die Sprünge weißlich, in größerer Entfernung von der Funkenstrecke blank. Die Bruchflächen haben nahe der Funkenstrecke faserigen Bruch, mit Fasern senkrecht zur Glasoberfläche. Die Breite der Fasern oder der Abstand der Fasern voneinander wächst mit der Entfernung von der Funkenstrecke von 0,01—0,04 mm am Boden und von 0,15—0,25 mm an der Seitenwand der Leidener Flasche. Senkrecht zu diesen Fasern liegen sehr feine Spalten nahe der Oberfläche der Bruchflächen mit 0,02 bis 0,04 mm Abstand voneinander. Fasern und feine Spalten fehlen auf den glatten Bruchflächen in großer Entfernung vom Funkenkanal.

Das Glas der Seitenwand zeigte häufig schwache negative Doppelbrechung zu beiden Seiten der Sprünge, nahe der Funkenstrecke, mit optischer Achse  $\perp$  zur Sprungrichtung, war also dauernd komprimiert. Der Boden der Leidener Flasche dagegen hatte neben den Sprüngen in der Nähe der Durchbohrung positive Doppelbrechung, war gedehnt  $\perp$  zur Sprungrichtung.

Ein Hauptsprung durchbricht die 2,2 mm dicke zylindrische *Seitenwand* nahezu normal zur Zylinderachse, zeigt in größerer Entfernung von der Funkenstrecke eine glatte Oberfläche mit flachen Wellenbergen und Wellentälern,

welche mit wachsender Entfernung breiter und niedriger, schließlich unmerklich werden, ähnlich wie bei den großen Bruchflächen der mit Flaschenfunken gespaltenen quadratischen Glasstücke Fig. 5 a und 6 Taf. I. Die anderen Sprünge in der Seitenwand treffen oft unter  $120^\circ$  oder  $90^\circ$  zusammen, zeigen gewundene Bänder, Schraubenwindungen und Wellenlinien.



Fig. 19.

Mit dem Mikroskop erkennt man trichterförmige oder kegelförmige Bruchflächen mit Wellenlinien oder feinen Schraubenflächen (Fig. 19) von 0,01 mm Abstand, und senkrecht zu diesen wieder feine Sprünge oder Falten von gleichem Abstand.

Die großen Sprünge, welche den *Boden* der Leidener Flasche durchbrechen, zeigen nahe der Funkenstrecke weißliche Schaumwände auf Kreisen von 0,07–0,18 mm; auf Schrauben-, Zylinder-, Kegel- und Kugelflächen oder Bruchflächen in Form von Kegeln, Kugeln, Röhren mit Anschwellungen und Querwänden, von parallelen Zylinderflächen mit 2–0,9 mm Durchmesser, auf denen wieder senkrecht zur Zylinderachse parallele feine Rippen oder Spalten liegen, deren Abstand (0,02–0,04 mm) in der Nachbarschaft des Funkenkanals am kleinsten ist.

Der Glasboden der Leidener Flasche ist an der dünnsten Stelle in der Mitte 5 mm, am Rande 7,5 mm dick. Die elektrischen Funken haben das Glas an der dünnsten Stelle durchbohrt und von hier aus auf der inneren Glasoberfläche sich radial ausgebreitet (Fig. 13, Taf. III), oberflächlich Glasstückchen herausgerissen und tiefe radiale Höhlungen gebildet, deren Wände die Glasoberfläche nahezu senkrecht treffen. Die Höhlungen erscheinen dem bloßen Auge begrenzt von halben kegelförmigen Röhren mit abgerundeten Köpfen oder radial aneinander gereihten hohlen Halbkugeln mit schmalen Zwischenstücken. Mit dem Mikroskop sieht man an einzelnen Stellen Sprünge in Form von offenen oder geschlossenen Zylindern und zylindrische oder kegelförmige Spiralbänder, wie in Fig. 11, III B (Taf. II). Die von den Spiralbändern begrenzten Glasbrocken sind bei den elektrischen Entladungen fortgeschleudert worden und trichterförmige Höhlungen mit der Form der Spiralbänder zurückgeblieben. Nahe der Oberfläche des Bodens der Leidener Flasche haben sich Spiral-

bänder mit gekreuzten Achsen gebildet. In großen zylindrischen Spiralbändern von 0,5–0,6 mm Durchmesser, welche radial von der Funkenstrecke ausgehen, liegen kleinere kegelförmige Spiralbänder mit drei bis fünf Windungen oder drei bis fünf zylindrische Ringe in trichterförmigen Höhlungen von 0,2 bis 0,4 mm Durchmesser und 0,25–0,1 mm Tiefe in gleichen Abständen nebeneinander senkrecht zur Achse des großen Spiralbandes. Fig. 14 (Taf. III) zeigt solche gekreuzte Spiralbänder in 12facher Vergrößerung; Fig. 15 die kleine Spirale A von Fig. 14 in 68facher Vergrößerung. In Fig. 16 (Taf. III) liegen zwei große kegelförmige Spiralbänder nebeneinander und in ihnen kleinere Spiralbänder mit gekreuzten Achsen. Figg. 14 und 16 zeigen dieselben Formen, wie ich sie in Tropfen dickflüssiger Kieselsäure bei Eintrocknen der wäßrigen Lösung beobachtet habe.<sup>1)</sup>

Senkrecht zur Oberfläche dieser hohlen Spiralbänder liegen wieder sehr feine Spalten von 0,03–0,005 mm Abstand.

Das äußere Randgebiet der radialen Höhlungen ist umgeben von drei bis vier matten, 2 mm breiten Ringen korrodierten Glases. Senkrecht zum inneren Rande der Ringe liegen viele feine parallele Sprünge mit 0,012–0,086 mm Abstand voneinander. Auf den Ringen sieht man verwaschen Newtonsche Farben. Der äußere Rand der Ringe erscheint im reflektierten Licht weiß. Die Schicht korrodierten Glases hat also einen Brechungsexponenten zwischen den Brechungsexponenten von Glas und Luft, besteht aus Glas mit unsichtbaren, luftgefüllten Schaumkammern, wie bei der von Kathodenstrahlen getroffenen Glaswand der Vakuumröhren.<sup>2)</sup>

Neben den tiefen Höhlungen (Fig. 13 A) erkennt man im Mikroskop mit Opakilluminator und reflektiertem Licht auf der Glasoberfläche Reihen feiner paralleler Sprünge von höchstens 0,002 mm Breite und 0,075–0,025 mm Abstand voneinander, die sich oft rechtwinklig kreuzen, die Glasoberfläche rechtwinklig treffen und einzelne Fächer oder Brocken mit konkaver Oberfläche begrenzen, da beim Heben des eingestellten Mikroskoprohres über jedem einzelnen Fach ein Bild der Beleuchtungslampe erscheint. Die feinen Spalten

1) G. Quincke, Ann. d. Phys. 9. p. 824. Fig. 96 m p; p. 805. Fig. 87 e 1902.

2) G. Quincke, Ann. d. Phys. 43. p. 439. 1914.

sind also keilförmig, oben dicker wie unten. In den einzelnen rechtwinkligen Fächern liegen luftgefüllte Sprünge mit drei bis vier Newtonschen Farbenringen auf Kugel- oder Kegelflächen, und an einzelnen Stellen Spiralen von 0,028—0,056 mm Durchmesser mit Rotationsachse senkrecht zur Glasoberfläche. In einigen Fächern sind die Glasbrocken über den Sprüngen parallel der Oberfläche von den elektrischen Entladungen abgeworfen. Diese rechtwinkligen Fächer mit Kugel- und Kegelsprüngen und Newtonschen Farbenringen, welche in Figg. 17 und 18 (Taf. III) in 63facher Vergrößerung abgebildet sind, gleichen den ähnlichen Sprüngen und Fächern mit konkaver Oberfläche, welche von elektrischen Flaschenfunken und den elektrischen Emanationen von elektrisch zerstäubtem Platindraht herrühren, und welche oben in § 2 und 3 (Fig. 4 a b und 9 Taf. I) beschrieben und abgebildet sind. In Fig. 17 ist die Dicke der Luftschichten in den Kugelsprüngen mit Newtonschen Ringen am Rande größer als in der Mitte. Bei B liegt eine kleinere Spirale auf einem größeren horizontalen Spiralsband mit gekreuzter Achse, ähnlich wie in Fig. 14. In Fig. 18 stehen die Achsen der Spiralsbänder und kegelförmigen Sprünge, ebenso wie die langen Sprünge, schräg zur Glasoberfläche.

Auf der Glasoberfläche sind viele Metallkugeln von 0,01 mm (Fig. 17, links oben) oder kleinere Körnchen von 0,0001 mm (Fig. 17, rechts oben) eingeschmolzen. An anderen Stellen sieht man runde Löcher, einzeln oder durch kurze lichte Strecken verbunden. Hier sind kleine Tropfen und Fäden von der verdampften Stanniolbelegung eingeschmolzen gewesen und bei der Reinigung der Glasoberfläche losgesprungen.

§ 5. *Die Oberflächenspannung elektrischer Schaumwände bestimmt die Gestalt der Sprünge in dem von elektrischen Strahlen durchbohrten Glase.*

Alle in §§ 1—4 beschriebenen, mit Luft oder heterogenen Stoffen gefüllten Spalten, Sprünge, Spiralen und Spiralsbänder im Glase haben die Formen von Schaumwänden I. und II. Art mit verschieden schnell erstarrter Oberfläche und können entstanden sein:

a) Durch verschiedenen elektrischen Querdruck im Glase und in schon vorhandenen, unsichtbaren Schaumwänden gleicher Form mit anderer Dielektrizitätskonstante und anderer elektrischer Leitfähigkeit.

b) Durch elektrische Emanationen verschiedener Qualität und verschiedener Geschwindigkeit, welche sich in diesen schon vorher im Glase vorhandenen unsichtbaren Schaumwänden aufgespeichert und gelöst haben, unter Änderung des Volumens und der Spannung.

c) Durch dünne Schichten Luft und Gasionen, welche in das Glas mit den elektrischen Emanationen eingedrungen sind mit verschiedener Geschwindigkeit, das Glas geschmolzen und verschieden stark erwärmt haben.

d) Durch elektrische Emanationen gleicher oder verschiedener Qualität, welche mit verschiedener Geschwindigkeit in das Glas eingedrungen sind, die Umgebung verschieden stark erwärmt und geschmolzen und sich in dem geschmolzenen Glase zu öartiger Flüssigkeit mit Oberflächenspannung gelöst haben.

Für die Annahme a) und b) spricht, daß freiwillige oder durch Ätzen mit kochendem Wasser erzeugte Sprünge im Glase<sup>1)</sup> dieselben oder ähnliche Formen zeigen wie die Sprünge von elektrisch durchbohrtem Glas. Die Annahmen a) und b) genügen aber nicht mehr, wenn die Sprünge unter 120° gegeneinander geneigt in der Funkenstrecke zusammentreffen, also durch die elektrischen Kraftlinien oder die Richtung der elektrischen Strahlen im Glase orientiert sind (Figg. 3 a b e f, 4 a b, 5, 6, 9, 11 I u. II). Für diese orientierten Sprünge würden nur die Erklärungen c) und d) genügen.

*Mit Luft gefüllte Sprünge.* Die mit den elektrischen Emanationen in das Glas eindringende Luft schmilzt und spaltet das Glas in ähnlicher Weise, wie eine Knallgasflamme eine Eisenplatte schmilzt und durchschneidet.

*Dünne Schichten Luft in klebriger Flüssigkeit bilden dieselben Formen wie dünne Schichten klebriger Flüssigkeit in Luft oder in einer anderen öartigen Flüssigkeit.* Infolge der Oberflächenspannung der Grenzflächen rollen die dünnen Schichten zusammen zu offenen oder geschlossenen Zylindern oder Kegeln, zu Spiralen und Schraubensäulen (Schaumwänden I. Art), welche allmählich Kugelgestalt annehmen, in kugelförmige Blasen (Schaumwände II. Art) übergehen.

---

1) G. Quincke, Ann. d. Phys. 46. p. 1032ff. 1915.



Dünne Luftschichten in Wasser sind lange bekannt an Wassertropfen, welche auf einer Wasseroberfläche schwimmen und deren Boden (eine Schaumwand II. Art) das Licht total reflektiert.

Die lufthaltigen Sprünge neben dem elektrisch zerstäubten Platindraht (§ 3) entstehen durch dünne Luftschichten in flüssigem Glase, deren Wände verschieden stark erwärmt und verschieden schnell erstarrt sind.

Der Entladungsstrom der Leidener Batterie klingt in einzelnen Partialentladungen ab. Bei jeder Partialentladung strahlt der zerstäubte Platindraht in einer Partialstrahlung elektrische Emanationen aus, normal zu seiner Oberfläche. Es dringen dünne keilförmige Schichten von Luft und Gasen in das Glas ein, verlieren ihre Geschwindigkeit, erwärmen und schmelzen das benachbarte Glas, rollen sich durch Wirkung der Oberflächenspannung um so schneller und um so mehr zusammen, je weniger klebrig das Glas ist, je länger es flüssig bleibt, je mehr es von den eindringenden Luftteilchen erwärmt wurde. An der Eintrittsstelle der Luftteilchen muß das Glas am stärksten erwärmt werden und am langsamsten erkalten, die Luftschicht am stärksten zusammenrollen, die Dicke der Luftschicht am größten sein und hier die offene oder geschlossene Spitze des mit Luft gefüllten Kegelmantels liegen — wie es tatsächlich der Fall ist.

Bei genügender Erwärmung geht der Kegelmantel in eine oder mehrere Kugelflächen über, oder der Kopf des Kegelmantels wird eine Halbkugel, ehe das Glas erstarrt, wie in einzelnen Fächern von Figg. 9 oder 11, VD (Taf. I u. II). Dünne Luftschichten mit flüssigen Wänden setzen sich an dünne Luftschichten mit festen Wänden rechtwinklig an. Die Wände der Sprünge zwischen den rechtwinkligen Fächern (Figg. 9, 11 I u. II) sind durch schwache Partialstrahlungen früher entstanden und schneller erstarrt als die Wände der Kegel- und Spiralsprünge im Innern der Fächer.

Die Luftschicht in diesen rechtwinkligen Sprüngen ist wieder keilförmig und an der Platinschicht am dicksten, hat hier das am stärksten erwärmte und erweichte Glas in die Höhe gedrängt und die ebene Oberfläche der einzelnen Fächer in eine konkave Oberfläche verwandelt.

Die radial von einzelnen Stellen über der Platinschicht



auslaufenden kegelförmigen Sprünge sind von Stellen stärkerer Partialstrahlung, von der Kuppe runder Tropfen auf der Drahtoberfläche (oder vielleicht einer anderen Stelle), ausgegangen und aus Luftschichten entstanden, welche sich rechtwinklig an eine ältere runde Kernblase angesetzt und dann eingerollt haben, ähnlich den Sphärokristallen 2. Klasse (vgl. § 1).

Die elektrischen Emanationen, welche von einem Radiator, von den Elektroden einer Influenzmaschine oder eines Induktoriums, den Belegungen einer Leidener Flasche oder einer Funkenstrecke im Glase ausgehen, sind von gleicher oder ähnlicher Qualität, haben ähnliche Wirkungen, erzeugen ähnliche Schaumwände I. und II. Art im Glase, wie ein elektrisch zerstäubter Platindraht.

*Dünne Schichten heterogener Substanz in Form von Kegeln, Zylindern, Spiralen und Kugelflächen.* Die Spiralbänder in Fig. 11 II, V, VI (Taf. II) und die Wände der weißlichen Schaummassen in den rechtwinkligen Sprüngen bestehen aus dünnen Schichten erstarrter ölartiger Flüssigkeit, welche in flüssigem Glas durch eingestrahlte elektrische Emanationen gebildet worden ist und sich durch Oberflächenspannung eingerollt hat. Beim Erstarren ändert diese ölartige Flüssigkeit ihr Volumen und scheidet gleichzeitig etwa in ihr absorbierte Gase aus, wodurch die von mir beobachtete *Umwandlung* der Spiralbänder in luftgefüllte Sprünge mit Newtonschen Farbenringen (§ 3) erklärt wird.

Weitere Versuche müssen entscheiden, ob auf den Spiralbändern im Glase noch eine Luftschicht liegt und ob vielleicht alle lufthaltigen Sprünge mit Newtonschen Farbenringen aus ölartiger Flüssigkeit entstanden sind, die in Form von Kegeln, Zylindern, Kugelflächen, Spiralen oder Spiralbändern in flüssigem Glase mit diesem erstarrt ist, und nicht direkt aus Luft und Gasen, welche mit den elektrischen Emanationen in das Glas eingedrungen sind, wie ich es oben als das Wahrscheinlichste angenommen habe.

Die großen wellenförmigen Bruchflächen und die feinen Furchen oder Falten auf den kegelförmigen oder gewölbten Sprungflächen deuten auf dünne unsichtbare Fremdstoffschichten ölartiger Flüssigkeit, welche bei der Diffusion der elektrischen Emanationen entstehen und deren obere und untere Grenzfläche durch später in ihrem Innern neu auftretende

Schaumwände gegeneinander gezogen wurden. Die dünne Fremdstoffschicht wird dadurch dünner und breiter, d. h. wellenförmig, wie ich früher gezeigt habe<sup>1)</sup>, und erstarrt unter Volumen- und Druckänderung zu einer heterogenen festen Fremdschicht mit anderem elektrischen Leistungsvermögen und anderer Dielektrizitätskonstante als die Umgebung. Bei einer folgenden Partialentladung der Leidener Batterie entsteht durch den elektrischen Querdruck ein Sprung längs der wellenförmigen Fremdschicht, deren Wellenberge um so höher sind und um so näher aneinander liegen, je mehr elektrische Emanationen von der Funkenstrecke aus in das Glas diffundiert sind, sich in der dünnen Fremdstoffschicht gelöst und je mehr neue Schaumwände sich in ihrem Innern gebildet haben. Die Verbreiterung der dünnen Fremdstoffschicht, Höhe und Anzahl der Wellenberge müssen also nahe der Quelle der elektrischen Emanationen, nahe der Funkenstrecke, am größten sein und mit der Entfernung von der Funkenstrecke abnehmen, wie die Photographien der Bruchflächen von Glas Nr. 15 und 16 (§ 2, Figg. 5 a u. 6 Taf. I) und die Sprünge der von Telefunken durchbohrten Seitenwand und Boden der Leidener Flasche (Figg. 12 u. 13, Taf. III) zeigen.

An einzelnen Stellen zeigen die erstarrten Fremdschichten auf einer größeren Bruchfläche statt der feinen parallelen Falten parallele Spalten, wo die Substanz der Fremdschicht beim Erstarren ihr Volumen vermindert hat.

Treten nahe der Funkenstrecke wiederholt oder periodisch größere Mengen elektrischer Emanationen auf, und bilden in dem erhitzten und geschmolzenen Glase viele dünne unsichtbare Fremdschichten ölartiger elektrischer Flüssigkeit, so rollen diese zusammen zu zylindrischen oder kegelförmigen Röhren, senkrecht zur festen Glasoberfläche, welche Schaumkammern I. Art umschließen, beim Erstarren absorbierte Luft abscheiden und als parallele Fasern senkrecht zur Glaswand auf dem weißen faserigen Bruch liegen. Sie sind ähnlich und entstehen ähnlich wie die Fasern, welche sich beim Gefrieren von Wasser mit Spuren von Salz oder Fremdstoff

---

1) G. Quincke, Ann. d. Phys. 7. p. 653. 1902; 13. p. 77, 236. 1904.

senkrecht zur zuerst gefrorenen Oberfläche bilden<sup>1)</sup>, oder den Fasern auf den Bruchflächen von Hartguß aus Gußeisen.<sup>2)</sup>

Bei starker andauernder Strahlung mit großen Mengen elektrischer Emanationen von großer Geschwindigkeit entstehen im Glase viele unsichtbare Schaumwände, welche kleine unsichtbare Schaumkammern umschließen, eine elektrische Gallerte. Wände und Inhalt der Schaumkammern können dieselben wägbaren Substanzen und elektrischen Emanationen, aber in verschiedener Konzentration, enthalten. Die elektrischen Emanationen verbreiten sich oder diffundieren im Glase wie Wasser in einer Leimgallerte; das Glas quillt auf, zeigt dabei periodisch  $+$ - oder  $-$ -optische Doppelbrechung, wie ich in § 1 gezeigt habe, deren Vorzeichen und Größe von der Diffusionsgeschwindigkeit der elektrischen Emanationen abhängt, wie bei quellender Leimgallerte von der Diffusionsgeschwindigkeit des Wassers.

Besteht der Inhalt der unsichtbaren Schaumkammern aus Luft oder Gasen, so entstehen Schaummassen mit kleinerer Lichtbrechung als Glas, wie die dünnen Schichten mit Newtonschen Farbenringen auf der Glaswand von Vakuumröhren durch Kathodenstrahlen oder auf dem Boden der von Telefunken durchbohrten Leidener Flasche (§ 4).

In der Nähe lufthaltiger Sprünge ist das Glas gewöhnlich komprimiert und zeigt negative Doppelbrechung mit optischer Achse senkrecht zur Sprungrichtung.

Die dünnen durchsichtigen Stellen von Zerstäubungsgittern auf Glas, welche wie eine Kristallplatte mit negativer Doppelbrechung wirken (§ 4), bestehen wahrscheinlich auch aus kleinen unsichtbaren Schaummassen mit elektrisch orientierten Schaumwänden.

#### § 6. Zusammenfassung.

1. Die Emanationen von elektrischen Funken und von Metalldrähten, welche durch den Entladungsstrom einer großen Leidener Batterie geschmolzen, verdampft und zerstäubt werden, dringen stoßweise in Glas ein, schmelzen das Glas, verbreiten sich im Glase wie Wasser in aufquellender Leimgallerte und bilden mit dem Glase periodisch ölartige Flüssig

1) G. Quincke, *Ann. d. Phys.* 18. p. 32. 38. 42. 1905.

2) G. Quincke, *Intern. Zeitschr. f. Metallurgie* 3. p. 92. Fig. 1. 1912.

keiten, welche verschieden schnell zu Schaumwänden I. oder II. Art erstarren.

2. An der Oberfläche dieser Schaumwände entstehen Bruchflächen oder luftgefüllte Sprünge mit Newtonschen Farbenringen, wenn sich die Schaumwände und der Kern der von ihnen umschlossenen Schaumkammern beim Abkühlen und Erstarren verschieden stark zusammenziehen.

3. Außerdem bilden die von den elektrischen Emanationen mitgerissenen Luftteilchen und Gasionen in dem flüssigen klebrigen Glase dünne Luftschichten mit Newtonschen Farbenringen, welche unter dem Einfluß der Oberflächenspannung dieselben Formen annehmen wie dünne Schichten klebriger Flüssigkeiten in Luft oder in einer anderen öartigen Flüssigkeit.

4. In dünnen Spiegelglasplatten bilden schwache elektrische Funken, welche in der von Holtz angegebenen Weise von einer auf die hohe Kante aufge kitteten Metallspitze ausgehen, in dem geschmolzenen Glase in der Nähe der kürzesten elektrischen Kraftlinie nahezu gerade, gewundene oder verzweigte, mit Luft gefüllte Röhren, welche durch Oberflächenspannung in eine Reihe einzelner Luftblasen zerfallen. Die Luftblasen haben die Gestalt von kugelförmigen oder schwin genden Wassertropfen.

Die Glasplatte wird dabei von dem Druck der erhitzten Luft im Funkenkanal wie von einem Schneidediamanten in der Richtung des größten Widerstandes gespalten durch zwei dünne breite Sprünge, welche von dem Funkenkanal ausgehen, parallel den polierten Seitenflächen der Glasplatte liegen und am äußeren Rande von Kreisbogen begrenzt sind.

Zu beiden Seiten der Funkenbahn zeigt das Glas abwechselnd positive und negative Doppelbrechung mit optischer Achse senkrecht zur Funkenbahn. Zuweilen entstehen Kugeln im Glase, mit den Polarisationsfarben eines positiven Sphärokristalles 2. Klasse, als ob die Kugeln in radialer Richtung gedehnt wären, wie Leimkugeln, welche in Wasser aufquellen.

5. Entladet man eine große Leidener Flasche durch den Funkenkanal eines schwachen elektrischen Funkens in einer dicken Glasplatte, so entstehen drei keilförmige Sprünge mit Newtonschen Farbenringen, welche in dem Funkenkanal mit Neigungswinkeln von  $120^\circ$  zusammenstoßen, außen von

Kreisbogen begrenzt sind und auf einer Schraubenfläche liegen oder wie die Flügel einer Schiffsschraube gebogen sind.

6. Mit stärkeren Flaschenfunken entstehen in der Nähe der kürzesten elektrischen Kraftlinien im Glase weiße luftgefüllte Schaummassen mit Schaumwänden I. und II. Art. Die ölartigen Schaumwände, die darüber liegenden Bruchflächen und die luftgefüllten Sprünge in dem verschieden schnell erstarrten Glase sind begrenzt von ebenen, gekrümmten oder wellenförmigen Flächen, von Zylindern, offenen oder geschlossenen Kegeln, Kugel- oder Schraubenflächen, von Spiralen oder Spiralbändern.

Sie bilden sich in ähnlicher Weise und mit ähnlichen Formen wie die positiv und negativ elektrischen Staubfiguren auf Harzkuchen, durch die Oberflächenspannung dünner Schichten verschieden schnell erstarrender ölartiger Flüssigkeit, einer Lösung elektrischer Emanationen in geschmolzenem Glas oder Harz.

7. Ähnliche Schaumwände I. und II. Art, Bruchflächen und luftgefüllte Sprünge, wie in der Nähe einer Funkenbahn, entstehen in Glasplatten, an deren Oberfläche ein dünner Platindraht von dem Entladungsstrom einer großen Leidener Batterie zerstäubt worden ist.

8. An einzelnen Stellen sieht man an der Oberfläche der von Flaschenfunken durchbohrten Glasstücke oder in den Glasplatten über dem zerstäubten Platin unter dem Mikroskop mit normal reflektiertem Licht geradlinige Spalten, senkrecht zur Glasoberfläche, in nahezu gleichen Abständen voneinander,  $\neq$  und  $\perp$  zur Drahtrichtung, welche rechtwinklige Fächer mit konvexer Oberfläche begrenzen. In der Mitte der einzelnen Fächer liegen Schaumwände oder luftgefüllte Sprünge mit Newtonschen Farbenringen in Form von Kegeln, Spiralen, Spiralbändern oder Kugelflächen. In einzelnen Fächern ist das an die Platinschicht grenzende Stück über der Spirale abgeschleudert.

9. Ähnliche Schaummassen, Schaumwände, Bruchflächen, luftgefüllte Sprünge und Spiralbänder im Glase oder spiralförmige Vertiefungen und Trichter an der Glasoberfläche wie in Nr. 7 und 8, aber in größeren Dimensionen, zeigt der Boden einer Leidener Flasche, die von Telefunken der drahtlosen Telegraphie durchbohrt worden ist.

Häufig liegen zwei Kegel oder Spiralbänder mit gekreuzten Achsen neben-, über- oder ineinander.

Sind die luftgefüllten Sprünge und die von ihnen umschlossenen Schaumkammern sehr klein und unsichtbar, so bedeckt eine dünne Schicht von verändertem Glase mit kleinerer Lichtbrechung und Newtonschen Interferenzfarben die Glasoberfläche.

10. Menge, Qualität und Geschwindigkeit der elektrischen Emanationen — welche von der Funkenstrecke oder dem elektrisch zerstäubten Metalldraht ausgehen, in das Glas eindringen, in diesem sich verbreiten, das Glas schmelzen, verschieden stark erwärmen und sich in dem geschmolzenen Glase lösen — bestimmen die Menge, Oberflächenspannung und Gestalt der erstarrenden elektrischen Schaumwände und luftgefüllten Sprünge in dem elektrisch durchbohrten Glase.

Heidelberg, den 18. Juli 1915.

(Eingegangen 24. Juli 1915.)

Glas mit elektrischen Funken durchbohrt.

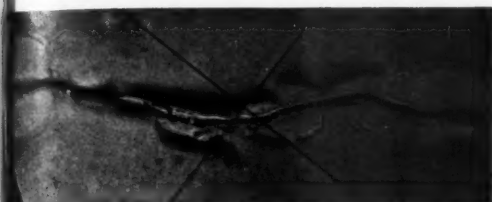


Fig. 1a.  $V = 147$

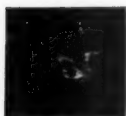


Fig. 1b.  $V = 74$

Fig. 3.



a  $V = 0,9$



c  $V = 1,2$



e  $V = 0,9$

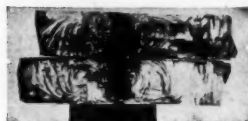


Fig. 5a.  $V = 0,6$

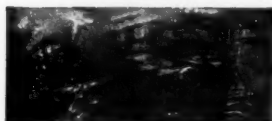


Fig. 5b.  $V = 63$



b  $V = 0,6$



d  $V = 1$



f  $V = 0,6$

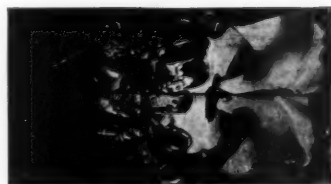


Fig. 6.  $V = 1$

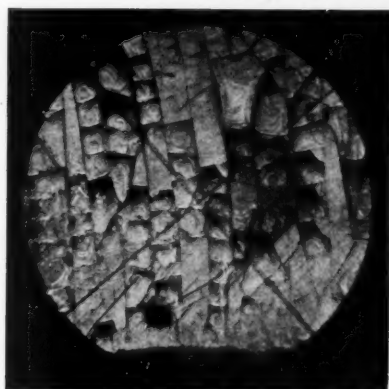


Fig. 9.  $V = 63$

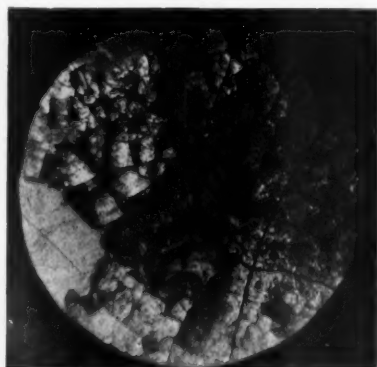


Fig. 4a. Reflektiertes Licht.  $V = 63$

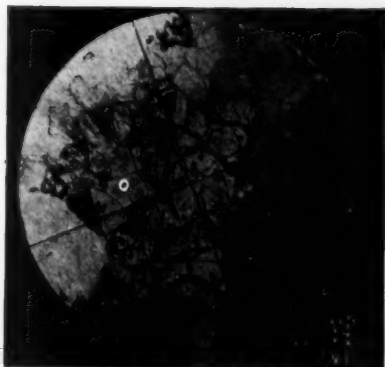


Fig. 4b. Durchgehendes Licht.  $V = 63$

The first of these is the fact that the  
 system is not a simple one. It is a  
 complex one, and it is not possible to  
 describe it in a simple way. It is a  
 system of many parts, and it is not  
 possible to describe it in a simple way.

The second of these is the fact that the  
 system is not a simple one. It is a  
 complex one, and it is not possible to  
 describe it in a simple way. It is a  
 system of many parts, and it is not  
 possible to describe it in a simple way.

The third of these is the fact that the  
 system is not a simple one. It is a  
 complex one, and it is not possible to  
 describe it in a simple way. It is a  
 system of many parts, and it is not  
 possible to describe it in a simple way.

The fourth of these is the fact that the  
 system is not a simple one. It is a  
 complex one, and it is not possible to  
 describe it in a simple way. It is a  
 system of many parts, and it is not  
 possible to describe it in a simple way.

The fifth of these is the fact that the  
 system is not a simple one. It is a  
 complex one, and it is not possible to  
 describe it in a simple way. It is a  
 system of many parts, and it is not  
 possible to describe it in a simple way.



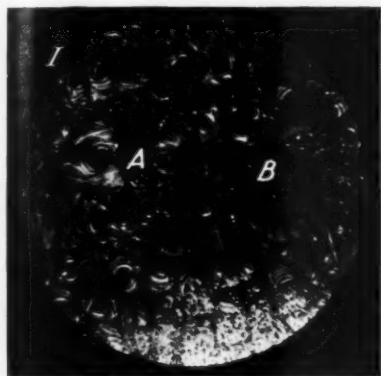


Fig. 11. I.  $V = 74$

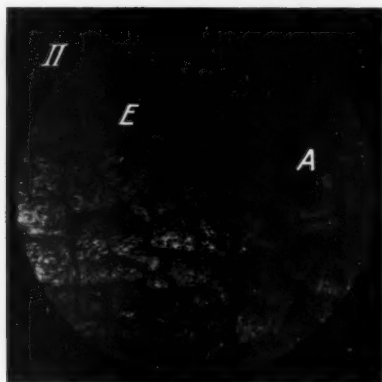


Fig. 11. II.  $V = 74$



Fig. 11. III.  $V = 63$

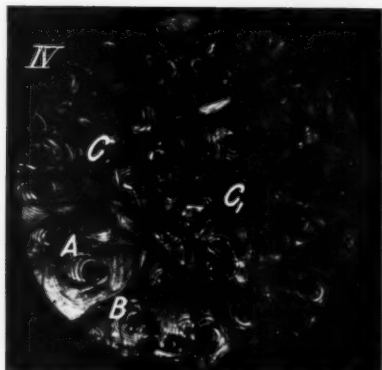


Fig. 11. IV.  $V = 63$

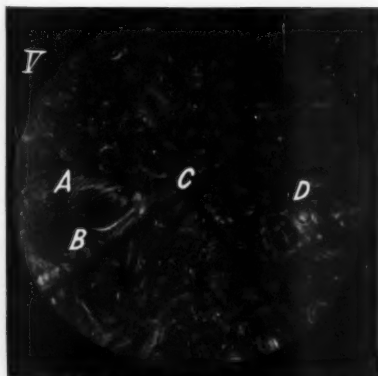


Fig. 11. V.  $V = 74$

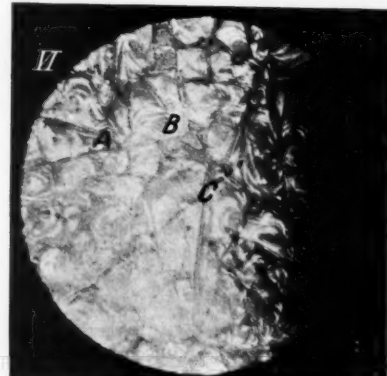


Fig. 11. VI.  $V = 74$

1900

1901

1902

1903

1904

1905

1906

1907

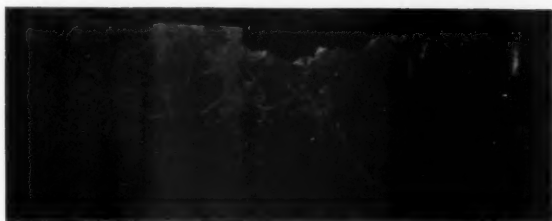


Fig. 12.

$V = 0,4$

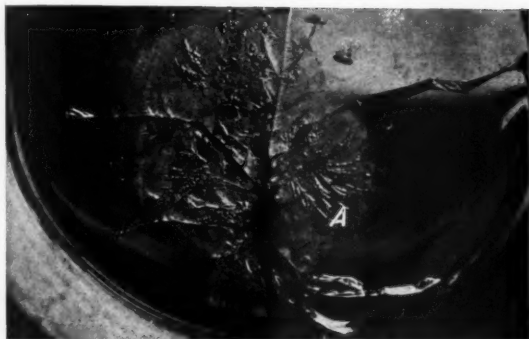


Fig. 13.

$V = 0,7$



Fig. 16.

$V = 12$



Fig. 14.

$V = 12$



Fig. 15.

$V = 63$

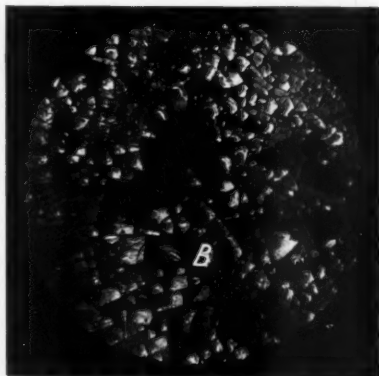


Fig. 17.

$V = 63$

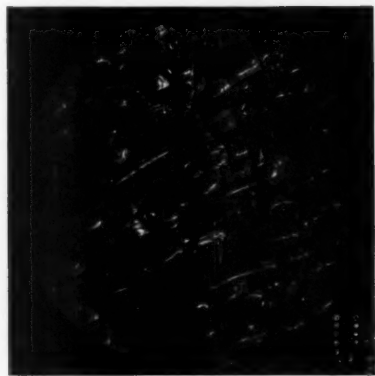


Fig. 18.

$V = 63$

100

